ORSAY

N° d'ordre : 471

Université de PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR INGENIEUR

PAR

Monsieur Julio VILAR PEDROCHE

SUJET : **MODELE DYNAMIQUE DE PLANIFICATION A LONG TERME D'UN RESEAU DE TRANSPORT D'ENERGIE ELECTRIQUE**

soutenue le 24 Avril 1981 devant la Commission d'examen

MM. B. Picinbono Président,

P. Bertrand

J.C. Dodu

J.F. Maurras

A. Merlin

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547321_0029

ORSAY

N° d'ordre : 471

Université de PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

pour obtenir

Le titre de DOCTEUR INGENIEUR

PAR

Monsieur Julio VILAR PEDROCHE

SUJET : **MODELE DYNAMIQUE DE PLANIFICATION A LONG TERME D'UN RESEAU DE TRANSPORT D'ENERGIE ELECTRIQUE**

soutenue le 24 Avril 1981 devant la Commission d'examen

MM. B. Picinbono Président,

P. Bertrand

J.C. Dodu

J.F. Maurras

A. Merlin

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je voudrais remercier le Gouvernement Français pour l'occasion qu'il m'a offerte de poursuivre des études supérieures en m'accordant le bénéfice d'une bourse.

Plus particulièrement, j'adresse ces voeux aux personnes du Ministère des Affaires Etrangères, du Centre Régional des Oeuvres Universitaires et Scolaires de Versailles, de l'Ecole Supérieure d'Electricité, de l'Université de Paris XI Orsay, de la Direction d'Etudes et Recherches et la Direction des Affaires Extérieures et de la Coopération d'Electricité de France pour les attentions qu'elles ont eues envers moi. Je fais part de ma très vive reconnaissance à M. DODU et à M. MAURRAS qui ont su diriger mes travaux avec grand dévouement.

Enfin, je présente mes remerciements à M. PICINBONO, M. BERTRAND et M. MERLIN, qui ont bien voulu faire partie du jury, pour les obligeances qu'ils ont eues à mon égard pendant la préparation de cette thèse.

Julio VILAR PEDROCHE

A ANNA MARIA ET ANDREA MARIA

TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION 1

NOTATION 4

CHAPITRE I - MODELISATION ET FORMULATION DU PROBLEME 6

1 - MODELISATION DU PROBLEME DYNAMIQUE 6

1.1 - Modélisation du système production-transport-consommation 6

1.2 - Modélisation du temps 7

1.3 - Les aléas affectant le système 7

1.4 - Modélisation du parc de production 8

1.5 - Modélisation de la demande 9

1.6 - Modélisation du réseau de transport 10

2 - FORMULATION MATHEMATIQUE 13

2.1 - Les coûts d'investissement 13

2.2 - Formulation du problème de gestion instantané 14

2.3 - Formulation du problème 15

3 - CONCLUSION DU PREMIER CHAPITRE 21

CHAPITRE II - METHODE DE RESOLUTION 22

1 - CONTRAINTE ACTIVE 22

2 - BASE DU PROBLEME 23

3 - PARTITIONNEMENT DE LA BASE DU PROBLEME REDUIT 27

4 - INFORMATION A GARDER EN MEMOIRE 34

4.1 - La matrice D' 35

4.2 - Le vecteur x 35

4.3 - Le vecteur Π_2 35

4.4 - La numérotation des forêts 35

5 - STRUCTURE DE A ET RESOLUTION DE SYSTEMES A DROITE ET A GAUCHE 38

6 - ALGORITHME DE RESOLUTION 42

6.1 - Démarrage de l'algorithme 42

6.2 - Calcul des multiplicateurs et choix de la variable candidate ... 44

...

Page

6.3 - Calcul de la colonne transformée 45

6.4 - Calcul du vecteur solution 48

6.5 - Détermination de la variable sortante 49

7 - CONCLUSION DU CHAPITRE II 50

CHAPITRE III - CHANGEMENTS DE BASE 51

1 - MISE A JOUR DE $\hat{\mathcal{B}}^{-1}$ 51

1.1 - Influence de la variable sortante sur $\bar{N}$ et $\bar{E}_v$ 51

1.1.1 - Variable sortante σ_i ou γ_i 51

1.1.2 - Variable sortante e_{1_i} 52

1.1.3 - Variable sortante e_{2_i} 52

1.2 - Influence de la variable entrante sur $\bar{N}$ et $\bar{E}_v$ 52

1.2.1 - Variable entrante σ_i ou γ_i 52

1.2.2 - Variable entrante e_{1_i} 52

1.2.3 - Variable entrante e_{2_i} 53

1.3 - Eléments de $\mathcal{B}_r^{-1}$ définissant D'(I') 53

1.4 - Variable entrante et variable sortante associées au même élément du graphe 54

2 - MISE A JOUR DES MULTIPLICATEURS Π_2 55

3 - MISE A JOUR DU VECTEUR SOLUTION 55

4 - TABLEAU DES CHANGEMENTS DANS $\mathcal{B}_r$ DES ENSEMBLES T_r, $\overline{T_r}$, E_v, $\overline{E_v}$, N et $\bar{N}$ ... 55

5 - MISE A JOUR DES FORETS ET DE LA NUMEROTATION 56

5.1 - Elément sortant d'une forêt 56

5.1.1 - Boucle sortante 57

5.1.2 - Branche sortante 59

5.2 - Elément entrant dans une forêt 61

5.2.1 - Boucle entrante 61

5.2.1.1 - Le noeud de rattachement appartient à $\bar{N}$ 61

5.2.1.2 - Le noeud de rattachement appartient à N 62

5.2.2 - Arc entrant 64

5.2.2.1 - Arc "b_s" entrant sans composante connexe associée 64

5.2.2.2 - Arc "b_s" entrant avec une seule composante connexe associée. 65

Page

5.2.2.2.1 - Arc b_s ayant ses deux extrémités dans $\overline{N}$ 67

5.2.2.2.2 - Arc b_s ayant une seule extrémité n_i dans $\overline{N}$ 67

5.2.2.3 - Arc b_s avec deux composantes connexes associées 68

5.2.2.3.1 - Les racines des composantes connexes associées à b_s sont une boucle vraie et une boucle fictive 68

5.2.2.3.2 - Les deux racines des composantes connexes associées à b_s sont des boucles fictives 69

5.2.2.3.2.1 - L'arc b_s a au moins une extrémité dans N 69

5.2.2.3.2.2 - L'arc b_s a ses deux extrémités dans $\overline{N}$ et a deux composantes connexes associées 70

6 - CONCLUSION DU TROISIEME CHAPITRE 72

CHAPITRE IV - PROGRAMME FORTRAN ET RESULTATS 73

1 - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME 73

2 - ORGANISATION DES TABLEAUX ET DES DONNEES 75

3 - FONCTIONS SPECIALES DE L'ALGORITHME 76

4 - RESULTATS 77

5 - CONCLUSION DU QUATRIEME CHAPITRE 80

CONCLUSION 81

ANNEXE II.1 - Méthode révisée du simplexe à variables bornées 82

ANNEXE II.2 - Formules de partitionnement d'une matrice régulière 87

ANNEXE III.1 - Variable entrante et sortante apparentées 89

ANNEXE III.2 - Boucle entrante associée à une composante connexe avec une boucle vraie 93

ANNEXE III.3 - Arc entrant b_s et nature des racines associées à ses extrémités 94

ANNEXE IV.1 - Sous-programmes de l'algorithme 95

BIBLIOGRAPHIE 103

MODELE DYNAMIQUE DE PLANIFICATION A LONG TERME D'UN RESEAU DE TRANSPORT D'ENERGIE ELECTRIQUE

INTRODUCTION

Face à une demande d'énergie électrique croissante de la part de sa clientèle, une entreprise comme Electricité de France doit planifier à long terme le développement de ses moyens de production et de transport en tenant compte des aléas qui affectent ce système.

Cette planification dépendant d'un trop grand nombre de facteurs, elle ne peut être traitée de façon globale par un seul modèle.

Compte tenu de la faible distance qui sépare les sites de production des centres de consommation, on admet, toutefois, qu'il est possible de séparer le problème de l'optimisation des moyens de production de celui de l'optimisation du réseau de transport. En termes économiques, on peut dire que le coût de renforcement du parc de production étant beaucoup plus grand que celui du renforcement du réseau, l'optimisation séparée de ces problèmes conduit à une assez bonne solution du problème complet. Tout au plus, commet-on une erreur de l'ordre de 1 % au maximum sur le volume du parc, dont on peut tenir compte forfaitairement par ailleurs [1]. Cette séparation nous permet, en outre, de traiter des problèmes de taille abordable.

Les premières étapes de cette étude complexe consistent à :

- Prévoir l'évolution de la demande sur la période étudiée. A la fin du siècle, la consommation annuelle sera ainsi de l'ordre de 600 TWh et la puissance de pointe atteindra les 110 à 120 GW.

- Déterminer le volume et la localisation des moyens de production à construire de façon à faire face à cette demande.

Les résultats de ces études sur l'évolution de la demande et le parc de production étant supposés connus, nous sommes prêts à aborder le problème de la détermination des besoins de transport et d'interconnexion interrégionaux.

Dans l'approche de ce problème que nous allons développer ici, la représentation du réseau est assez schématisée. On représentera le réseau par un graphe où chaque région est modélisée par un noeud et chaque liaison par un arc. On admettra que seule la première loi de Kirchhoff est satisfaite par l'énergie transitant dans le réseau. En outre, les capacités de transit seront considérées comme des variables continues.

En effet, l'objectif n'est pas de définir le développement optimal du réseau de transport dans toute sa complexité. Il est de :

1°) - Mettre en évidence, les besoins de transport et d'interconnexion sur les principaux axes du réseau ;

2°) - Permettre d'étudier l'influence des plus importants paramètres tels que la localisation du parc de production ou l'évolution de la demande ;

3°) - D'obtenir des résultats qui serviront de base à une étude plus approfondie du réseau dans laquelle on tiendra compte, entre autres, des deux lois de Kirchhoff, des niveaux de tension, de la section des conducteurs.

Les besoins de transport et d'interconnexion sont assurés actuellement par le réseau THT (très haute tension). On peut imaginer que dans le futur, par la percée de nouvelles technologies, d'autres moyens pourraient assister le réseau THT dans cette tâche.

Notre problème consiste à définir le développement optimal des moyens de transport et d'interconnexion, sans présumer de la nature de ces techniques.

Dans ce problème technico-économique de choix d'investissements, on cherche, en accord avec la doctrine d'E.D.F. dans ce domaine, une stratégie sur longue période minimisant le coût total actualisé des dépenses en renforcement du réseau plus l'espérance mathématique des coûts de gestion du système production-transport.

Cette étude à long terme peut porter sur une durée de vingt à trente ans, l'avenir plus lointain étant considéré comme trop incertain.

Le coût de gestion est la somme des coûts de production (coût du combustible) et du coût de la défaillance ou énergie non desservie par E.D.F. aux consommateurs. Le coût de défaillance est une mesure de la gêne causée par les coupures de courant. Le coût de gestion dépend des nombreux aléas qui affectent les moyens de production, les moyens de transport ainsi que la demande.

Malgré la schématisation adoptée, le problème de la détermination des besoins de transport et d'interconnexion reste cependant un problème de grande taille nécessitant la mise en oeuvre de moyens informatiques importants.

Cette thèse expose les bases mathématiques d'une méthode permettant de le résoudre dans le cadre des approximations qui ont été retenues.

NOTATION

t	Indice d'une année de la période étudiée
$x(t)$	Vecteur des capacités de transport à l'année t
$\underline{x}$	Vecteur des capacités de transport du réseau existant
$\overline{x}$	Vecteur des capacités de transport maximales
τ	Durée de l'étude
Q	Ensemble des paliers modélisant la monotone annuelle de charge
S	Ensemble des situations d'indisponibilité du parc de production
γ	Vecteur des consommations régionales
d	Vecteur des puissances appelées régionales (demandes)
σ	Vecteurs des productions des groupes
$\overline{p}$	Vecteur des capacités maximales de production des groupes
p	Vecteur des capacités disponibles de production des groupes
Ψ	Vecteur des flux dans les arcs de transport
$\mathcal{N}$	Ensemble des noeuds du graphe
V_p	Ensemble des boucles d'entrée du graphe
V_d	Ensemble des boucles de sortie du graphe
V_f	Ensemble des arcs du graphe
T	Matrice d'incidence $\mathcal{N} \times V$
T_p	Matrice d'incidence $\mathcal{N} \times V_p$
T_d	Matrice d'incidence $\mathcal{N} \times V_d$
T_f	Matrice d'incidence $\mathcal{N} \times V_f$
$\mathcal{B}$	Matrice de base du programme linéaire
$\mathcal{B}_r$	Matrice de base du programme linéaire réduit

Suite des NOTATIONS

$\mathcal{C}_r$	Ensemble des contraintes de transit dans les arcs V_f
$\overline{T}_r$	Ensemble des contraintes de transit actives du programme linéaire réduit
T_r	Ensemble des contraintes de transit non-actives du programme linéaire réduit
N	Ensemble des sommets des forêts
$\overline{N}$	Ensemble des sommets n'appartenant pas aux forêts
φ	Vecteur des flux correspondant aux contraintes T_r
$\overline{\varphi}$	Vecteur des flux correspondant aux contraintes $\overline{T}_r$
$\mathcal{E}_v$	Ensemble des contraintes d'évolution des capacités de transit
$\overline{E_v}$	Ensemble des contraintes $\mathcal{E}_v$ actives
E_v	Ensemble des contraintes $\mathcal{E}_v$ non-actives
e_1	Vecteur des variables d'écart associées aux contraintes de transit
e_1^p	e_1 des contraintes de flux maximal
e_1^n	e_1 des contraintes de flux minimal
e_2	Vecteur des variables d'écart associées aux contraintes $\mathcal{E}_v$
λ_c	Vecteur des coûts horaires de défaillance
$\lambda(t,j)$	Vecteur des coûts de défaillance relative au palier j et l'année t
μ_c	Vecteur des coûts horaires de production
$\mu(t,j)$	Vecteur des coûts de production relatifs au palier j et l'année t
$c(t-1)$	Vecteur des coûts d'investissement unitaires des lignes du réseau de transport mises en service à l'année t
ρ	Taux d'actualisation
δ_j	Durée du palier j
θ_a	Age d'un ouvrage
$\mathcal{H}$	Durée de vie d'un ouvrage
$\mathbb{E}(g)$	Espérance mathématique de la fonction g
$\|A\|$	Cardinal de l'ensemble A.

...

CHAPITRE I

MODELISATION ET FORMULATION DU PROBLEME

1 - MODELISATION DU PROBLEME DYNAMIQUE

1.1 - Modélisation du système production-transport-consommation

Dans le graphe orienté G = $(\mathcal{N},V)$ représentant le système production-transport-consommation, on regroupe en chaque sommet $i \in \mathcal{N}$ tous les moyens de production d'une région ainsi que la demande de la région i [2].

Chaque groupe de production situé dans une région i est représenté par une boucle, dite d'entrée, rattachée au sommet i et orientée dans le sens des aiguilles d'une montre. La demande d'une région i est représentée par une boucle, dite de sortie, rattachée au sommet i et orientée dans le sens contraire.

Les moyens de transport entre deux régions i et j seront représentés par un arc orienté reliant les deux sommets i et j.

Ci-dessous nous représentons un graphe modélisant un réseau avec :

- 3 régions
- 5 groupes de production
- 3 liaisons inter-régionales

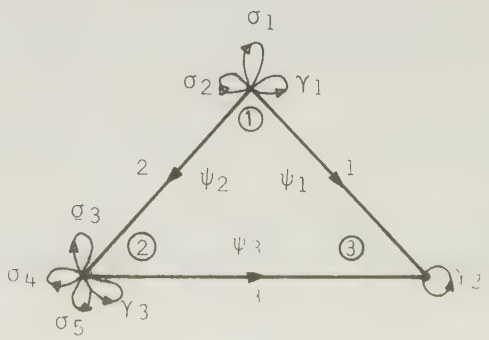


FIGURE 1

...

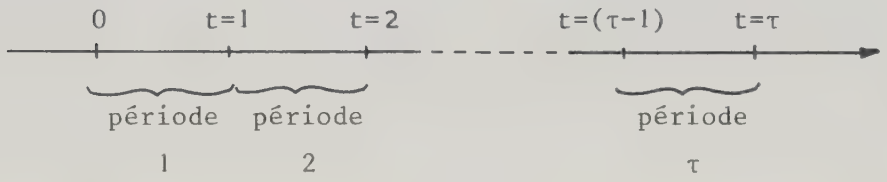
Sur la figure 1, σ_i ($i \in V_p(t)$) représente la puissance fournie par le groupe i, ψ_i est le flux dans l'arc $i \in V_f$ et γ_i ($i \in V_d$) la puissance délivrée dans la région i. On a :

$$V(t) = V_f \cup V_d \cup V_p(t)$$

Remarque : Pour simplifier les notations, on notera V_p et V les ensembles $V_p(t)$ et V(t). Cette simplification est possible en considérant $|V_p(t)|$ constante $\forall$ t et égal au nombre de groupes existants en fin d'étude.

1.2 - Modélisation du temps

Nous considérerons l'état du système aux instants $t = 1,2,\ldots,\tau$



La durée de l'étude est ainsi divisée en τ périodes que nous appelerons années même si leur durée n'est pas obligatoirement d'un an.

1.3 - Les aléas affectant le système

Les principaux aléas qui affectent le système sont :

- Les variations de la puissance appelée (aléas conjoncturels et aléas climatiques).
- Les indisponibilités des ouvrages de transport et de production.

Seules les indisponibilités des groupes ont été prises en compte dans la présente formulation. Les aléas affectant la consommation pourraient être modélisés de façon analogue.

1.4 - Modélisation du parc de production

Chaque groupe $i \in V_p$ est caractérisé par :

- Son coût unitaire de production μ_{c_i}
- Sa capacité maximale de production $\overline{p}_i$
- Un taux de panne τ_i, représentant la probabilité que le groupe i soit indisponible.

Un groupe sera, soit disponible, et sa capacité de production p_i sera alors maximale, soit indisponible, et sa capacité de production sera alors nulle, ces deux états étant les seuls admis.

$$p_i = \begin{cases} 0 \text{ avec la probabilité } \tau_i \\ \text{ou} \\ \overline{p}_i \text{ avec la probabilité } (1 - \tau_i) \end{cases}$$

Nous représenterons ces aléas en simulant un grand nombre de situations d'indisponibilité des groupes de production. Chaque situation sera obtenue par tirage au sort de l'état de disponibilité de chaque groupe selon son taux de panne.

Les situations d'indisponibilité seront indicées par r ($\forall r \in S(t)$). Elles se différencient entre elles par le vecteur p (t, r) des capacités de production.

Ces situations seront considérées comme équiprobables.

On pose :

$$\nu = |S(t)| \ , \ \forall t$$

La puissance fournie σ_i par le groupe $i \in V_p$ ne doit pas dépasser la production disponible p_i. D'où :

$$0 \leq \sigma \leq p$$

...

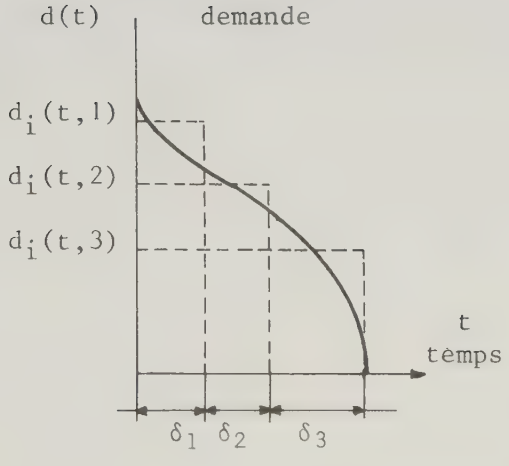
1.5 - Modélisation de la demande

La puissance appelée est considérée sous la forme d'une monotone de charge annuelle, que l'on modélise par des paliers caractérisés par leur durée et le niveau de la demande.

Une monotone de charge annuelle est une courbe de coordonnées (x, y), où x représente le nombre d'heures de l'année pendant lesquelles la consommation est supérieure ou égale à y.

Nous considérerons trois paliers :

- Le palier de pointe correspondant au niveau supérieur de demande ;
- Un palier d'heures pleines ;
- Un palier d'heures creuses correspondant au niveau inférieur de la demande.



Soit au sommet i :

$d_i(t,j)$ le niveau de demande correspondant au palier $j \in Q$

δ_j la durée du palier $j \in Q$

La puissance délivrée γ_i ne doit pas dépasser la puissance appelée d_i pour $i \in V_d$. D'où :

$$0 \leq \gamma \leq d$$

...

1.6 - Modélisation du réseau de transport

Le réseau est représenté par des arcs dont les capacités de transit sont considérées comme des variables continues.

Les capacités évaluées aux instants t seront représentées par un vecteur x (t) correspondant aux capacités des liaisons à la fin de la période t.

On se donne une valeur initiale x (o) = $\underline{x}$ représentant le réseau existant et une borne supérieure x (τ + 1) = $\overline{x}$ des valeurs de x(t), représentant les capacités maximales de moyens de transport entre deux régions.

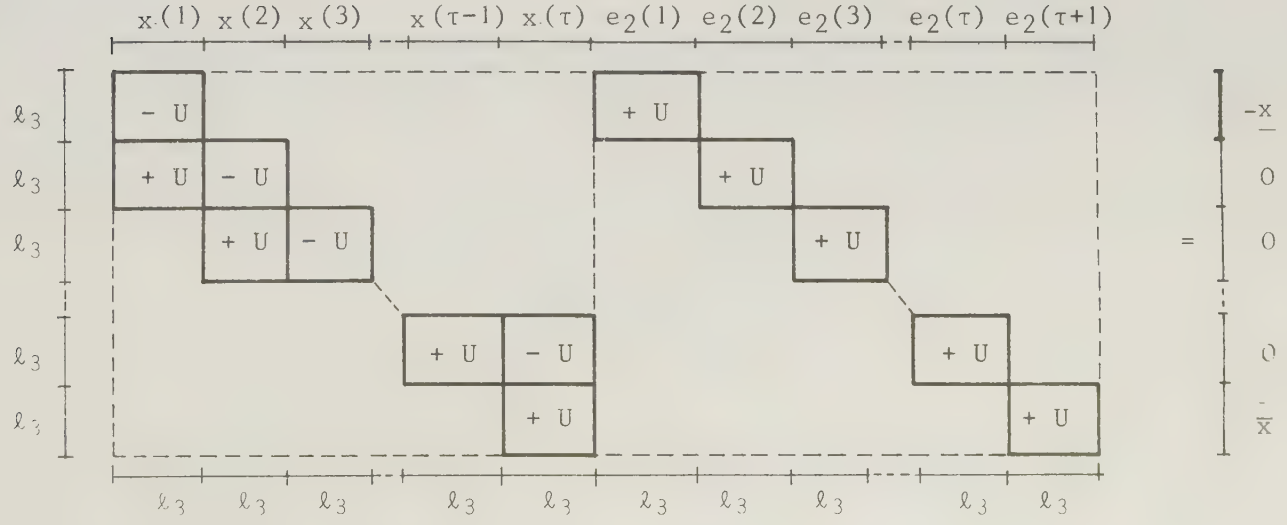
On suppose que la capacité d'une liaison ne peut pas décroître d'une période à l'autre (il n'y a pas de déclassement d'ouvrages). Par suite :

$$x(t) \geq x(t-1) \quad \text{pour} \quad t = 1, 2, \ldots, (\tau+1)$$

En introduisant les variables d'écart e_{2_i} il vient :

$$\begin{aligned} -\ x(1) \qquad\qquad + e_2(1) \quad &= -\ \underline{x} \\ +\ x(t) - x(t+1) + e_2(t+1) \quad &= \quad 0 \quad \text{pour } t = 1,2,\ldots,(\tau-1) \\ + x(\tau) \quad + e_2(\tau+1) \quad &= \quad \overline{x} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :



où U est la matrice unité

et $\ell_3 = |V_f|$

Nous pouvons associer au graphe orienté $G = (\mathcal{N}, V)$ une matrice d'incidence noeuds-arcs notée T indicée en lignes par $\mathcal{N}$ et en colonnes par V.

Nous appelerons u_i le vecteur colonne tel que :

$$\begin{cases} u_i(j) = 0 \text{ pour } j \neq i \\ u_i(i) = 1 \end{cases}$$

T^i étant la colonne i de T, on a :

$T^i = +u_j$ si $i \in V_p$

$T^i = -u_j$ si $i \in V_d$

$T^i = +u_{j_1} - u_{j_2}$ si $i \in V_f$

} j étant l'indice du noeud de rattachement de la boucle i

j_1 étant le noeud initial et j_2 le noeud terminal de l'arc i.

La matrice T relative au graphe de la figure 1 est alors :

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	γ_1	γ_2	γ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	
①	+1	+1				−1			−1	−1		
②			+1	+1	+1			−1		+1	−1	$\mathcal{N}$
③							−1		+1		+1	
			V_p				V_d			V_f		

Nous parlerons de boucles positives par rapport aux éléments associés aux colonnes égales à u_j et de boucles négatives pour les colonnes égales à $-u_j$.

La matrice T peut être partitionnée en trois matrices

T_p, T_d et T_f telles que :

$$T = [T_p \vdots T_d \vdots T_f]$$

Remarque : On note T_p au lieu de $T_p(t)$ et T au lieu de T(t).

...

Le flux dans chaque arc ne doit pas dépasser la capacité de cet arc. On peut donc écrire en introduisant un vecteur de variables d'écart, noté e_l, les équations matricielles suivantes :

$$|\Psi| \leq x \iff \begin{cases} \Psi - x + e_l^p = 0 \ , \ e_l^p \geq 0 \\ -\Psi - x + e_l^n = 0 \ , \ e_l^n \geq 0 \end{cases}$$

D'autre part, nous avons admis que la circulation de l'énergie dans le réseau n'obéit qu'à la première loi de Kirchhoff.

On peut donc écrire sous forme matricielle :

$$T \begin{bmatrix} \sigma \\ \cdots \\ \gamma \\ \cdots \\ \Psi \end{bmatrix} = 0$$

ou encore :

$$T_p \, \sigma + T_d \, \gamma + T_f \, \Psi = 0$$

Nous pourrons représenter de façon matricielle l'ensemble des contraintes sous la forme :

$$M_c \ y = b$$

où :

$$y = [\sigma , \gamma , \Psi , e_l^p , e_l^n , x]$$

$$> \ \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3 \cdot \ell_3 \cdot \ell_3 \cdot \ell_3 <$$

$$M_c = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline T_p & T_d & T_f & & & \\ \hline & & +U & +U & & -U \\ \hline & & -U & & +U & -U \\ \hline \end{array} \qquad b = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \vee \\ \ell_4 \\ \cdot \\ \ell_3 \\ \cdot \\ \ell_3 \\ \wedge \end{array}$$

...

Où : U est la matrice unité

ℓ_1 est égal au nombre de boucles d'entrée
ℓ_2 est égal au nombre de boucles de sortie
ℓ_3 est égal au nombre d'arcs de transport
ℓ_4 est égal au nombre de sommets du graphe

2 - FORMULATION DU PROBLEME

La fonction économique du problème se compose de deux termes. Le premier représente les coûts d'investissement correspondant aux renforcements du réseau de transport ; le deuxième représente l'espérance mathématique des coûts de gestion [8].

2.1 - Les coûts d'investissement

Les renforcements effectués à la période t s'expriment par le vecteur :

$$[x(t) - x(t-1)]$$

Soit :

c_ℓ = coût unitaire d'investissement de la liaison ℓ

ρ = taux d'actualisation

$w_\ell(\tau-t)$ = prix d'usage de la liaison ℓ correspondant à un équipement d'âge $(\tau-t)$

Le coût total d'investissement actualisé s'écrit :

$$\sum_{t=1}^{\tau} c\,(t-1)\,[x(t) - x(t-1)]$$

où $$c_\ell(t) = \frac{c_\ell}{(1+\rho)^t} - \frac{w_\ell(\tau-t)}{(1+\rho)^\tau}$$

Remarque : Dans le cas d'une charge annuelle d'immobilisation constante, le prix d'usage de la liaison ℓ correspondant à un équipement d'âge θ_a et de durée de vie Ⓗ est donné par la formule :

$$w_\ell(\theta_a) = c_\ell \frac{(1+\rho)^{Ⓗ} - (1+\rho)^{\theta_a}}{(1+\rho)^{Ⓗ} - 1}$$

en supposant nulle la valeur de l'équipement en fin de vie. On posera $c(\tau) = 0$.

2.2 - Formulation du problème de gestion instantané

Nous noterons par $f_t\ [x(t),p(t),d(t,j)]$ le coût de gestion instantanné pour l'année t, et le niveau de demande correspondant au palier j.

Cette fonction est le résultat d'un problème d'optimisation qui consiste à minimiser la somme du coût de production des groupes et du coût de défaillance, tout en respectant les contraintes du système production-transport-consommation.

Nous appelons coût de production le produit scalaire :

$\mu_c.\sigma$ où μ_c est le vecteur des coûts unitaires de production

On appelle défaillance l'énergie non distribuée ; elle s'exprime sous forme vectorielle par :

$$\varepsilon.\ [d - \gamma]$$

où $\varepsilon = (1,1,\ldots,1)$

Soit λ_c le vecteur des coûts unitaires de défaillance. Le coût de défaillance s'exprime par :

$$\lambda_c\ [d - \gamma]$$

Il représente une évaluation économique des préjudices subis par les utilisateurs du fait des délestages.

...

Le problème du coût de gestion optimale à un instant donné est un problème de flot à coût minimal. Il se formule de la manière suivante :

Problème $\mathbb{P}_t[x(t),p(t),d(t,j)]$

$$\begin{cases} \text{Min } \{z = \mu_c(t)\sigma + \lambda_c\,[d\,(t,j) - \gamma]\} \\ \text{Sous les contraintes :} \\ \begin{cases} T_f\,\Psi + T_p\,\sigma + T_d\,\gamma = 0 \\ |\Psi| \leq x(t) \\ 0 \leq \sigma \leq p(t) \\ 0 \leq \gamma \leq d\,(t,j) \end{cases} \end{cases}$$

où p (t) est le vecteur des productions disponibles l'année t.

La fonction f est définie par :

$$f_t\,[x(t),p(t),\,d\,(t,j)] \;=\; zopt\,(t,j)$$

où zopt (t,j) est la valeur à l'optimum de la fonction économique du problème $\mathbb{P}_t\;[x(t),p(t),d\,(t,j)]$.

Nous appelerons $\sigma_o(t,j),\gamma_o(t,j),\Psi_o(t,j)$ la solution optimale du problème $\mathbb{P}_t\;[x(t),p(t),d\,(t,j)]$

2.3 - Formulation du problème

Le problème se formule comme suit :

$$\begin{cases} \text{Min} \sum_{t=1}^{\tau} \left\{ c(t-1)[x(t)-x(t-1)] + \frac{1}{(1+\rho)^t}\,\mathbb{E}\left\{ \sum_{j\in Q} \delta_j f_t[x(t),p(t),d\,(t,j)] \right\} \right\} \\ \begin{cases} -x(1) + e_2(1) = -\underline{x} \\ x(t) - x\,(t+1) + e_2(t+1) = 0 \qquad t = 1,2,..,(\tau-1) \\ x(\tau) + e_2(\tau+1) = \overline{x} \end{cases} \end{cases}$$

où $\mathbb{E}$ représente l'espérance mathématique.

On remplace l'espérance mathématique du coût de gestion annuel par une moyenne sur l'ensemble S(t) des situations d'indisponibilité des groupes thermiques tirées au sort. On obtient alors le problème approché P_1 :

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \sum_{t=1}^{\tau} \left\{ [c(t-1) - c(t)]\, x(t) + \frac{1}{(1+\rho)^t} \left(\frac{1}{\nu} \sum_{r \in S(t)} \sum_{j \in Q} \delta_j f_t [x(t), p(t,r), d(t,j)] \right) \right\} \\ \quad \text{Sous les contraintes :} \\ (1) \quad x(t) - x(t-1) \geq 0 \text{ pour } t = 1,2,\ldots,(\tau+1) \end{array} \right.$$

Le deuxième membre de la fonction économique dépend des solutions des problèmes $\Pi P_t\ [x(t), p(t,r), d(t,j)]$ pour $t=1,2,\ldots,\tau$; $j \in Q$ et $r \in S(t)$. Nous appellerons $\sigma_o(t,j,r)$, $\gamma_o(t,j,r)$, $\Psi_o(t,j,r)$ les solutions optimales de ces problèmes de gestion.

Afin d'avoir à résoudre un seul problème d'optimisation, nous allons établir une formulation équivalente.

Appelons P_2 le problème suivant :

$$P_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \sum_{t=1}^{\tau} [c(t-1) - c(t)]\, x(t) + \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j \in Q} \sum_{r \in S(t)} [\mu(t,j)\sigma(t,j,r) - \lambda(t,j)\gamma(t,j,r)] \\ \quad \text{Sous les contraintes :} \\ \left| \begin{array}{ll} x(t) - x(t-1) \geq 0 & \text{pour } t=1,..,(\tau+1) \\ (2) \left| \begin{array}{l} T_f \Psi(t,j,r) + T_p \sigma(t,j,r) + T_d \gamma(t,j,r) = 0 \\ |\Psi(t,j,r)| \leq x(t) \\ 0 \leq \sigma(t,j,r) \leq p(t,r) \\ 0 \leq \gamma(t,j,r) \leq d(t,j) \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} \text{pour } t=1,..,\tau \\ j \in Q \\ r \in S(t) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{avec : } \mu(t,j) = \frac{\mu_c(t)\,\delta_j}{\nu.(1+\rho)^t} \quad \text{et } \lambda(t,j) = \frac{\lambda_c\,\delta_j}{\nu.(1+\rho)^t} \end{array} \right.$$

Soit $\hat{z}_1$ la valeur optimale de la fonction objectif de P_1 et $\hat{z}_2$ la valeur optimale de la fonction objectif de P_2, nous cherchons à établir l'égalité $\hat{z}_1 = \hat{z}_2$, pour prouver l'équivalence des deux formulations P_1 et P_2. Nous faisons deux démonstrations, la première étant par l'absurde.

...

1°) Soit $\{\hat{\sigma}(t,j,r), \hat{\gamma}(t,j,r), \hat{\psi}(t,j,r)\ \forall (t,j,r), \hat{x}\}$ une solution optimale de P_2 et supposons que :

$\hat{\sigma}\ (k_1,k_2,k_3)$, $\hat{\gamma}\ (k_1,k_2,k_3)$, $\hat{\psi}\ (k_1,k_2,k_3)$ constituent une solution non-optimale du problème de gestion

$\mathrm{IP}_{k_1}\ [\hat{x}(k_1),p(k_1,k_3),\ d(k_1,k_2)]$. Ceci implique qu'il existe une autre solution optimale $\sigma_o\ (k_1,k_2,k_3)$, $\gamma_o\ (k_1,k_2,k_3)$, $\psi_o\ (k_1,k_2,k_3)$ de ce problème telle que :

- les contraintes (2) (k_1,k_2,k_3) sont respectées
- et que le terme :

$$\mu\ (k_1,k_2)\quad \sigma_o(k_1,k_2,k_3) - \lambda(k_1,k_2)\ \gamma_o(k_1,k_2,k_3)$$

est strictement inférieur au terme :

$$\mu\ (k_1,k_2)\ \hat{\sigma}\ (k_1,k_2,k_3) - \lambda(k_1,k_3)\ \hat{\gamma}\ (k_1,k_2,k_3)$$

Ceci entraîne qu'en remplaçant les vecteurs $\hat{\sigma}(k_1,k_2,k_3)$, $\hat{\gamma}(k_1,k_2,k_3)$, $\hat{\psi}(k_1,k_2,k_3)$ dans la solution du problème P_2 par les vecteurs $\sigma_o(k_1,k_2,k_3)$, $\gamma_o(k_1,k_2,k_3)$ et $\psi_o(k_1,k_2,k_3)$, nous obtiendrions une solution réalisable de P_2, dont le coût serait inférieur à celui de la solution optimale de ce problème ce qui est impossible. On a donc $\forall (t,j,r)$ nécessairement :

$$\mu(t,j)\ \hat{\sigma}(t,j,r) - \lambda(t,j)\ \hat{\gamma}(t,j,r) = f_t[\hat{x}(t),p(t,r),d(t,j)]$$

puisque $\hat{x}$ satisfait en outre les contraintes (1).

2°) - Considérons maintenant la solution optimale du problème P_1, que nous noterons $\tilde{x}(t)$ et les vecteurs $\tilde{\sigma}(t,j,r)$, $\tilde{\gamma}(t,j,r)$, $\tilde{\psi}(t,j,r)$ solutions optimales des problèmes de gestion $\mathrm{IP}_t[\tilde{x}(t),p(t,r),d(t,j)]$.

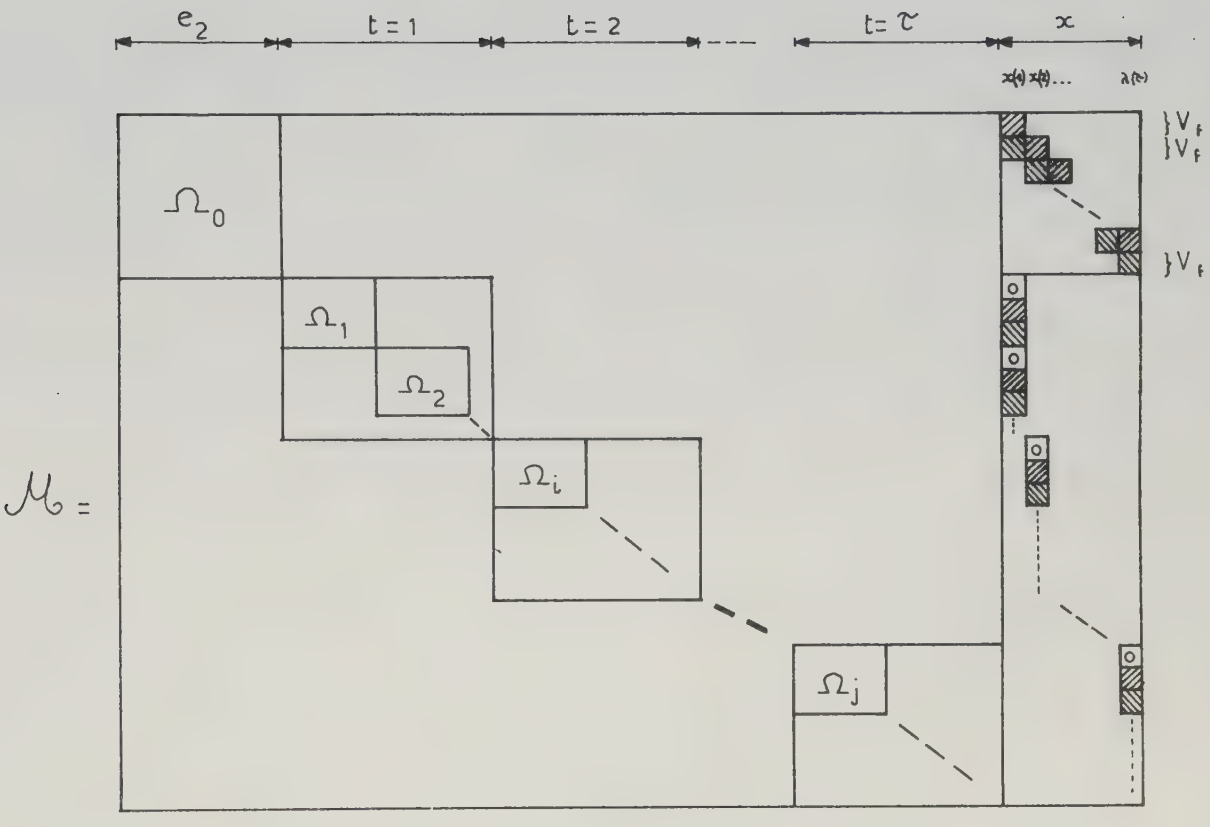
Le vecteur ainsi constitué satisfait les contraintes du problème P_2. Il constitue donc une solution réalisable de P_2 et l'on a :

$$f_t[\tilde{x}(t),p(t,r),d(t,j)] = \mu(t,j)\ \tilde{\sigma}(t,j,r) - \lambda(t,j)\tilde{\gamma}(t,j,r), \forall (t,j,r) \Rightarrow \hat{z}_1 \geq \hat{z}_2$$

Ces deux propriétés montrent que les problèmes P_1 et P_2 sont équivalents, puisqu'on en déduit que $\hat{z}_1 = \hat{z}_2$.

Nous étudierons maintenant la structure matricielle des contraintes de P_2.

Soit $\mathcal{M}_0$ la matrice des contraintes de P_2.

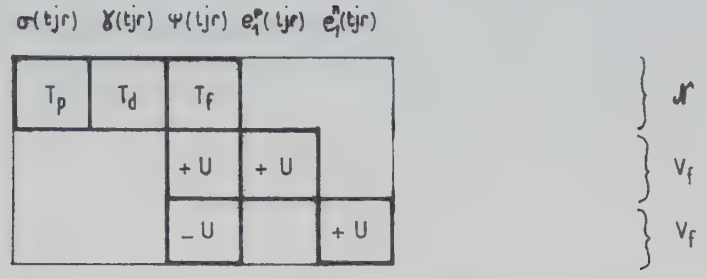


Le bloc Ω_o qui est égal à la matrice identité de dimension $(\tau+1)\ |V_f| \times (\tau+1)\ |V_f|$, correspond aux variables e_2 et aux contraintes $\mathcal{E}_v$.

...

Chaque bloc Ω_i pour $i \neq 0$, est caractérisé par une valeur de (t,j,r) et est de la forme :

Ω_i =



Il est de dimension $(|\mathcal{M}| + 2\,|V_f|) \times (\,|V| + 2\,|V_f|)$

La matrice des contraintes a donc une structure bloc angulaire avec des colonnes couplantes associées aux vecteurs x(t) (t = 1,2...,τ).

Tous les blocs d'une période t sont liés par les colonnes associées au vecteur x(t).

De plus, les périodes sont liées entre elles par les contraintes d'évolution du réseau uniquement. Si ces contraintes étaient inactives à l'optimum, le problème pourrait être décomposé en τ problèmes indépendants, chacun d'eux étant relatif à une période et de la forme :

$$\text{Pour } t=1 \text{ à } \tau \quad \left\{ \text{Min } [c(t-1) - c(t)]\, x(t) + \sum_{j \in Q} \sum_{r \in S(t)} [\mu(t,j)\,\sigma(t,j,r) - \lambda(t,j)\gamma(t,j,r)] \right.$$

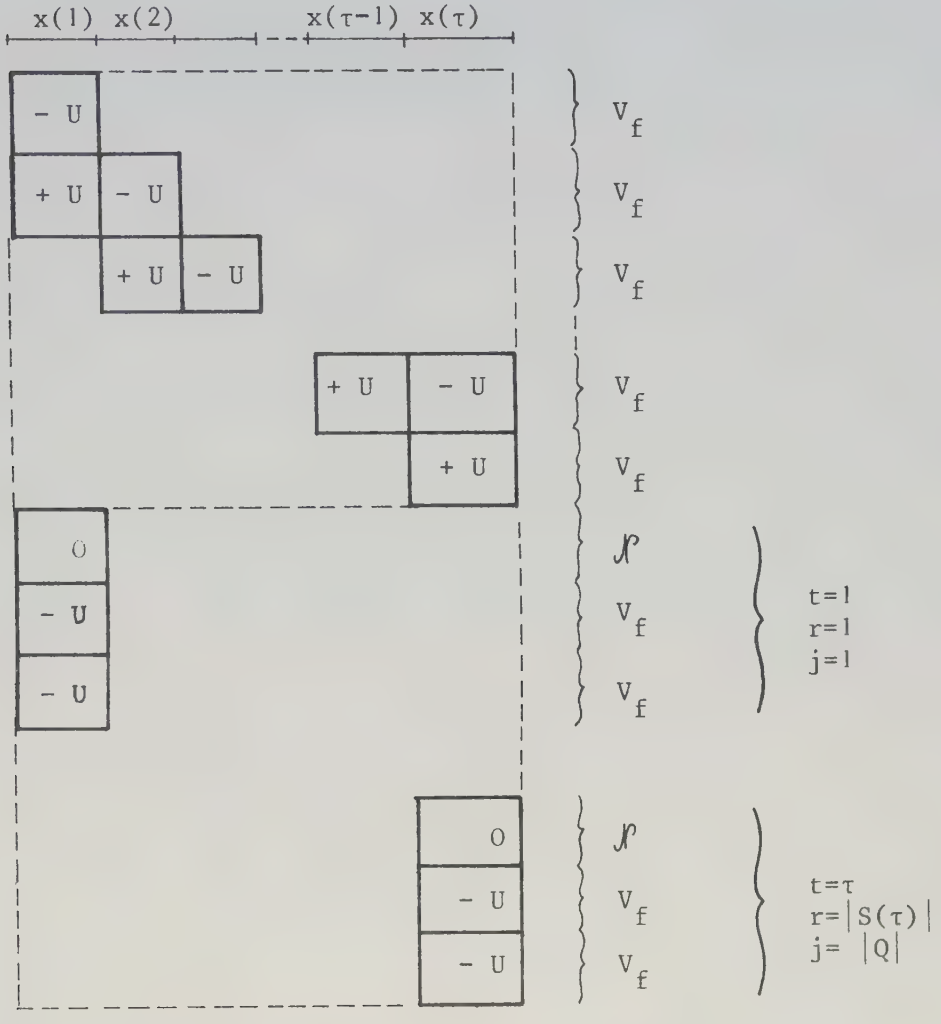
Le bloc des colonnes couplantes a pour dimension :

$$\{[\,|\mathcal{M}| + 2\,|V_f|\,] \;.\; n_s + |V_f|\,(\tau+1)\} \times (|V_f| \;.\; \tau)$$

en posant : $n_s = |Q| \;.\tau.\nu$

...

La structure de ce bloc est la suivante :



Le problème P_2 peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\begin{cases} \text{Min } c_c\, y \\ \mathcal{M}y = b_o\ ,\ \delta^- \leqslant y \leqslant \delta^+ \end{cases}$$

Nous allons examiner la structure des vecteurs c_c, y et b_o. Les variables sont rangées de façon à avoir un vecteur y de la forme :

$$y = [e_2, w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_{n_s}, x(1), x(2), \ldots, x(\tau)]$$

où $w_j = [\sigma_j, \gamma_j, \Psi_j, e^p_{1j}, e^n_{1j}]$

...

Le vecteur des coûts est alors :

$$c_c = [0, c_{w_1} \ldots, c_{w_j} \ldots, c_{w_{n_s}}, c_e(1), \ldots, c_e(\tau)]$$

où $c_e(t)$ est donné par la formule :

$$c_e(t) = c\ (t-1) - c(t)$$

et c_{w_j} est de la forme de :

$$c_{w_j} = [\mu_j, -\lambda_j, 0, 0, 0]$$

Le second membre b_o s'écrit :

$$b_o = [b_{o_e}, b_{o_1} \ldots, b_{o_j}, \ldots, b_{o_{n_s}}]$$

avec :

$$b_{o_e} = [-\underline{x}, 0, \ldots, 0, \overline{x}]$$
$$b_{o_i} = [0, 0, 0] \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n_s$$

3 - CONCLUSION DU PREMIER CHAPITRE

Moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, et en tenant compte seulement des aléas affectant la disponibilité des groupes de production, le problème de la planification à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique se pose sous la forme d'un programme linéaire de grande taille (P_2). Nous allons maintenant, en tirant profit des caractéristiques de ce programme linéaire, définir une méthode de résolution qui permette de le traiter dans des temps de calcul et avec un encombrement mémoire raisonnables sur ordinateur.

CHAPITRE II

METHODE DE RESOLUTION

Nous allons résoudre notre programme linéaire en appliquant la méthode révisée du simplexe avec quelques particularités, notamment en ce qui concerne la mise en mémoire de l'inverse de la matrice de base ($\mathcal{B}^{-1}$) et les calculs faisant intervenir $\mathcal{B}^{-1}$ [3]. Nous ferons un partitionnement de la matrice de base $\mathcal{B}$, qui consiste en un découpage en quatre sous-matrices dont l'une d'elles A est régulière. On pourra ainsi exprimer $\mathcal{B}^{-1}$ en fonction de sous-matrices de $\mathcal{B}$ qui sont assez creuses, d'une sous-matrice D' de $\mathcal{B}^{-1}$ et enfin de l'inverse de A.

Afin d'éviter les calculs d'inversion de A, nous mettrons à profit la structure de flot de cette sous-matrice régulière.

1 - CONTRAINTE ACTIVE

Lorsque les inconnues doivent satisfaire des contraintes d'inégalité de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\cdot j}^{i} \; y_i \geq a_{o_j}$$

On introduit une variable d'écart $e_j \geq o$ de façon à se ramener à la forme standard. On obtient ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\cdot j}^{i} \; y_i - e_j = a_{o_j}$$

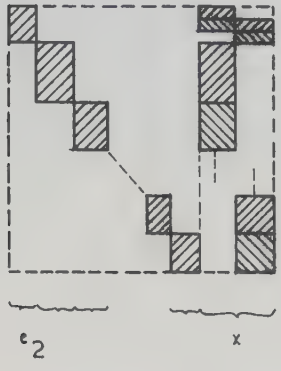
On appellera contrainte active toute contrainte de ce type telle que e_j soit variable hors-base. Si e_j est de base, la contraire sera dite non-active.

2 - BASE DU PROBLEME

La matrice de base ($\mathcal{B}$) de notre problème a, ainsi que la matrice des contraintes, une structure particulière. Cette structure comporte une partie de forme bloc-angulaire et une autre partie formée de colonnes couplantes

Pour un problème ayant deux périodes, on a :

$\mathcal{B}$ =



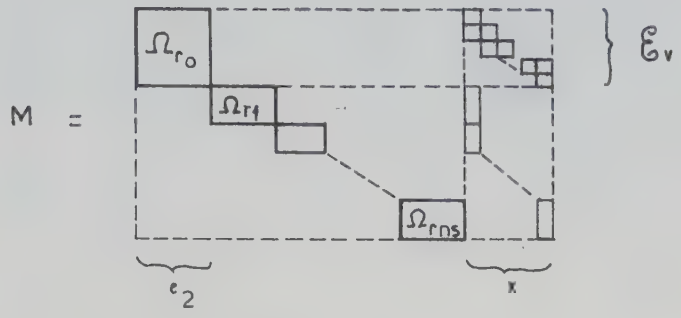
Plusieures constatations peuvent être faites à propos de la base :

- Les variables x_i sont toujours de base puisqu'elles sont sans condition de signe.
- Le nombre de colonnes couplantes de $\mathcal{B}$ est égal à la dimension du vecteur x (constante).
- Les variables Ψ_i sont elles aussi sans condition de signe. Elles sont donc toujours de base. On peut dire que chaque bloc j de la base a au moins $|V_f|$ colonnes.
- Les blocs angulaires ont un nombre de colonnes variables d'un bloc à l'autre.

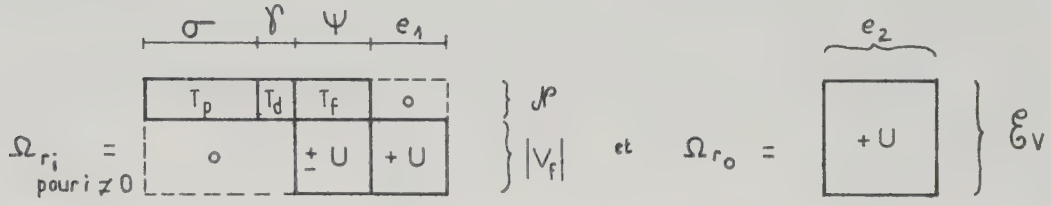
Nous pouvons constater que les deux contraintes de transit associées à un flux Ψ_i, à savoir la contrainte de transit supérieur et celle de transit inférieur, ne peuvent pas être actives simultanément. Une conséquence de cette propriété est que nous pouvons nous contenter d'écrire une seule de ces deux contraintes. Le choix dépend de la base. Si l'une de ces deux contraintes est active, c'est elle qui est exprimée explicitement ; si aucune des deux contraintes n'est active, le choix est arbitraire. On obtient ainsi un problème réduit.

...

Nous présentons ci-dessous la forme matricielle de ce problème.



où les blocs Ω_{r_i} sont de la forme



où ±U représente une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont soit +1, soit -1.

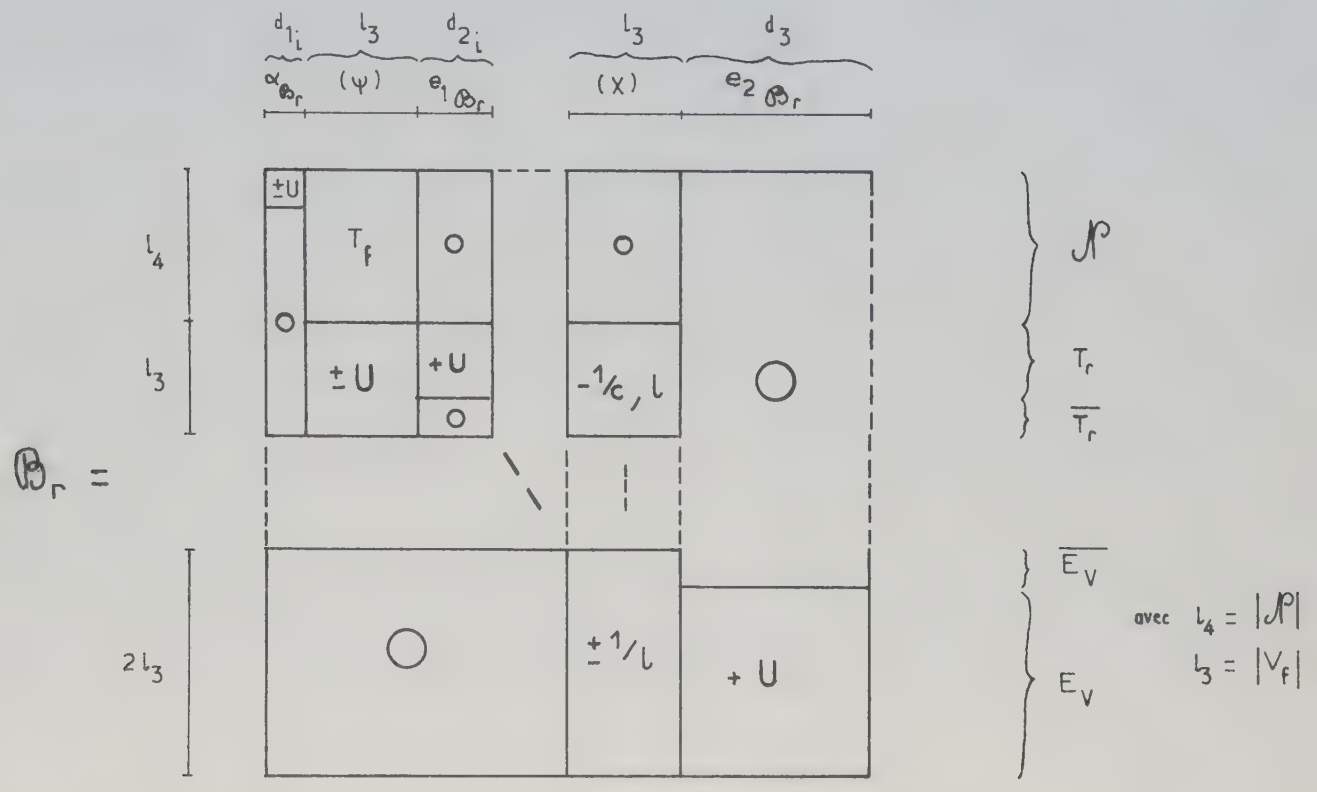
Considérons une base du problème réduit.

Une première constatation nous permet d'affirmer qu'une seule des variables σ_i et γ_i associées à un noeud d'un même bloc peut appartenir à une base.

En effet, si ces deux variables appartenaient à la base simultanément, la matrice de base posséderait deux colonnes linéairement dépendantes (colonnes unité au signe près). Cette remarque nous permet de remplacer, pour chaque bloc des contraintes Ω_{r_i} pour $i \neq 0$, les vecteurs σ et γ par un vecteur α ayant ℓ_4 composantes chacune d'elles étant associée à un noeud du graphe.

Les éléments $\alpha_{i_{\mathcal{B}_r}}$ de base représentent soit $\sigma_{i_{\mathcal{B}_r}}$ soit $\gamma_{i_{\mathcal{B}_r}}$ suivant que σ_j ou γ_i est de base.

Dessinons la matrice de base $\mathcal{B}_r$ obtenue en considérant une seule des deux contraintes de flux pour chaque arc de transit et pour une seule période d'étude ($\tau = 1$).



± 1 signifiant qu'il existe un seul élément par ligne et un seul élément par colonne, cet élément étant +1 ou -1.

Notons que les valeurs ℓ_3 et ℓ_4 sont fixées tandis que d_{1_i}, d_{2_i} et d_3 sont variables et dépendent de la base.

Nous pouvons partitionner l'ensemble des contraintes de transit de chaque bloc du problème réduit en deux ensembles T_r et $\overline{T_r}$ définis par :

- $\overline{T_{r_i}} \in \overline{T}_r$, $\overline{T}_{r_i}$ est une contrainte active
- $T_{r_j} \in T_r$, T_{r_j} est une contrainte non-active

Nous noterons que : $|\overline{T}_r| + |T_r| = |V_f|$

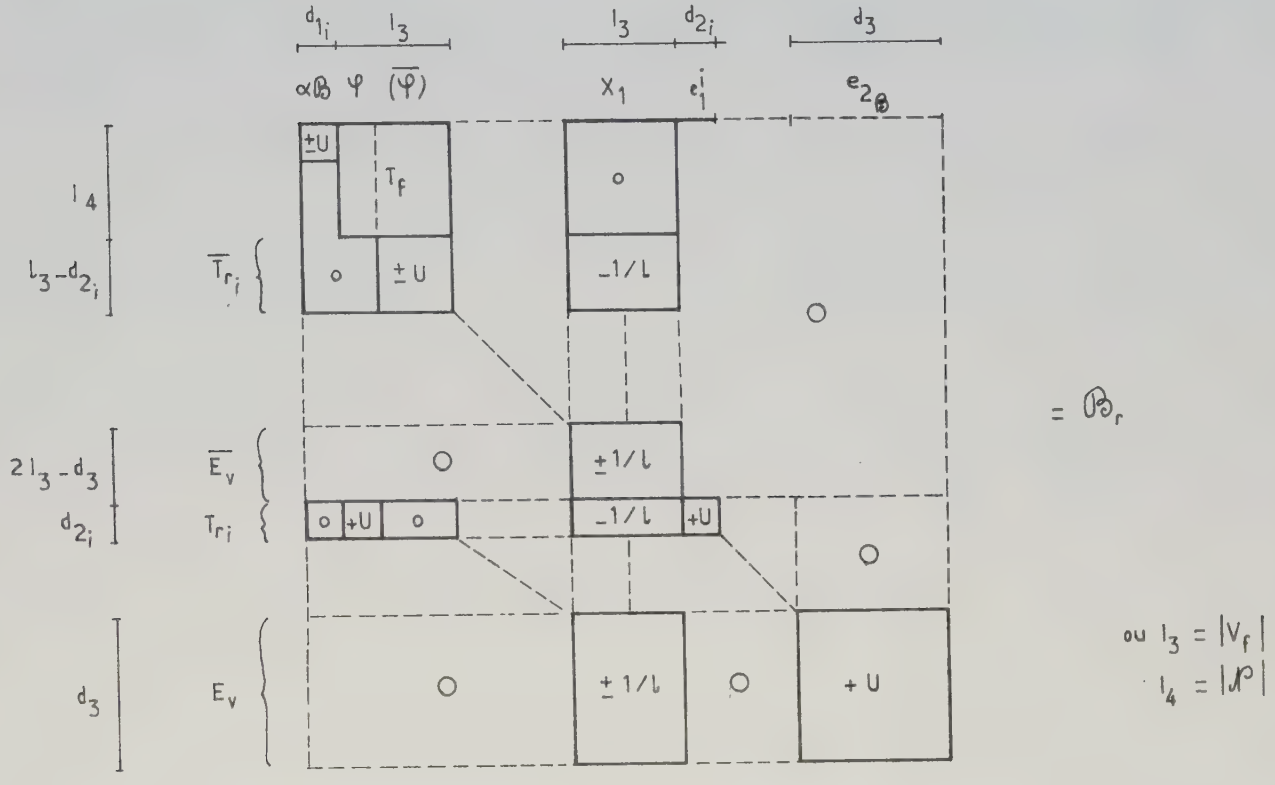
A ce partitionnement correspond un partitionnement de Ψ en φ et $\overline{\varphi}$ où les composantes de $\overline{\varphi}$ correspondent chacune à une contrainte de $\overline{T}_r$ et chaque composante de φ correspond à une contrainte de T_r.

De même, V_f peut être partionné suivant les ensembles T_r et $\overline{T}_r$ en : v_f et $\overline{v_f}$.

...

L'ensemble des contraintes d'évolution $\mathcal{E}_v$ seront également partionnées en E_v et $\overline{E}_v$, où $\overline{E}_v$ est l'ensemble des contraintes d'évolution actives et E_v l'ensemble des contraintes d'évolution non-actives.

En réécrivant la base on obtient la forme suivante :



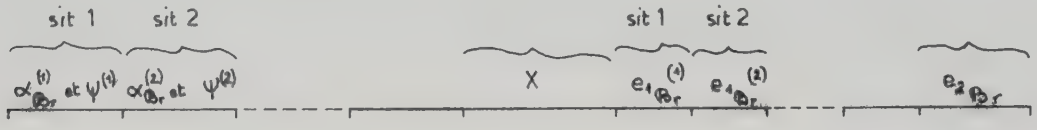
en ne considérant que les contraintes de transit de borne supérieure pour les sous-ensembles T_r (t,j,r).

...

3 - PARTITIONNEMENT DE LA BASE DU PROBLEME REDUIT

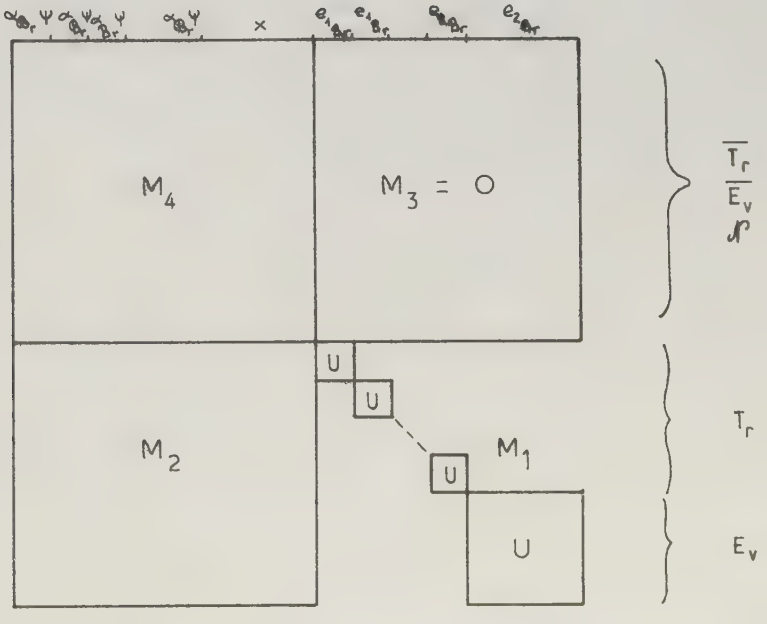
Pour le problème de grande taille tel que celui que nous traitons, l'espace mémoire à utiliser dans un ordinateur deviendrait prohibitif si l'on utilisait la méthode standard du simplexe. Il nous faut donc réduire l'information à garder en mémoire à chaque itération. Pour cela, nous allons partitionner la matrice de base. Un effet secondaire de ce partitionnement est de réduire les erreurs de précision. Nous ferons référence à l'Annexe II.2 à propos des formules associées à un partitionnement.

Considérons une base où nous disposons les colonnes de la façon suivante :



En réorganisant les lignes de $\mathcal{B}_r$, nous pouvons obtenir une matrice nulle et une matrice identité dans les colonnes correspondant à $e_1 \mathcal{B}_r$ et $e_2 \mathcal{B}_r$.

$\mathcal{B}_r =$



...

Nous pouvons appliquer les formules de partitionnement et on obtient :

$M'_4 = M_4^{-1}$ $\quad$ M_1 étant régulière => M'_4 sera régulière

$M'_2 = -I_1^{-1} M_2 M'_4 = - M_2 M_4^{-1}$

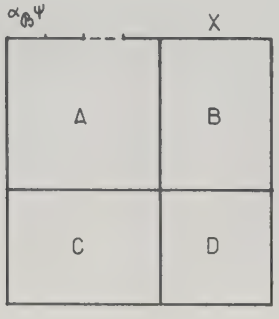
$M'_3 = 0$

$M'_1 = M_1^{-1} = I_1$

M_4 est régulière. En effet, dans le cas contraire $\mathcal{B}_r$ ne serait pas régulière puisqu'il existerait une relation linéaire de dépendance entre les lignes de $[M_4 \vdots 0]$.

Nous cherchons à faire un partitionnement de la matrice M_4 tel que :

$M_4 =$

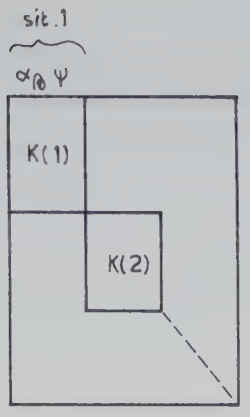


où A doit être régulière

Considérons la matrice M_4 à laquelle on enlève les colonnes associées à x et les lignes associées a $\overline{E}_v$. Cette matrice Δ a une structure bloc angulaire. Chaque bloc est indicé en colonnes comme les variables $\alpha_{\mathcal{B}_r}(t,j,r)$ et $\Psi(t,j,r)$, et en lignes, comme les contraintes $\overline{T}_r(t,j,r)$ et les contraintes associées à $\mathcal{P}$, pour la situation définie par (t,j,r).

Cette matrice est constituée de n_s blocs notés $\Delta(i)$ pour $i = 1,2,\ldots, n_s$.

Δ =



Soit I_Δ l'ensemble des indices des lignes et J_Δ l'ensemble des indices des colonnes de la matrice Δ on veut démontrer que :

$$|I_\Delta| \geq |J_\Delta|$$

quelle que soit la base.

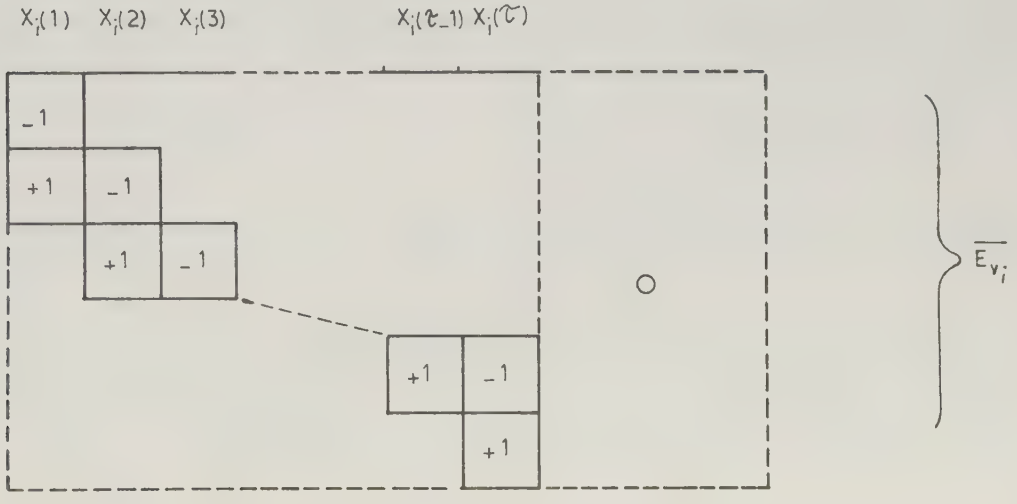
On doit noter que, pour une base, le nombre de contraintes dans $\overline{E}_v$ est inférieur ou égal au nombre de composantes de x, soit $\tau . |V_f|$.

Supposons en effet qu'il existe un arc $i \in V_f$ tel que :

$$|\overline{E}_{vI}| > \tau$$

d'où $|\overline{E}_{v_i}| = \tau+1$, puisque $\overline{E}_{v_i} = \mathcal{E}_{v_i}$ et $|\mathcal{E}_{v_i}| = \tau+1$

Dans la matrice de base $\mathcal{B}_r$ on peut écrire les lignes correspondantes à $\overline{E}_{v_i}$ et l'on a, en réarrangeant les lignes et les colonnes correspondant à x_i et $\overline{E}_{v_i}$:



...

En faisant la somme de ces (τ+1) lignes on obtient 0. On doit donc avoir nécessairement :

$$|\overline{E}_v|_i \leq \tau \qquad \forall i \in V_f$$

D'où :

$$|\overline{E}_v| \leq |V_f| \cdot \tau \qquad \forall I$$

Les bases pour lesquelles le nombre de contraintes dans $\overline{E}_v$ est maximal (égal à $|V_f| \cdot \tau$) sont telles que :

$$\forall i,t \quad i \in V_f \text{ et } t = 1,2\ldots, \tau$$

$$x_i(t) = \begin{cases} \underline{x}_i \\ \text{ou} \\ \overline{x}_i \end{cases}$$

Ayant établi la relation

$$|\overline{E}_v| \leq |V_f| \cdot \tau$$

et avec :

$$|I_{M_4}| = |J_{M_4}|$$

où I_{M_4} = Ensemble des indices des lignes de M_4

et

J_{M_4} = Ensemble des indices des colonnes de M_4

On peut conclure que :

$$|I_\Delta| = |I_{M_4}| - |\overline{E}_v| \geq |J_{M_4}| - |V_f| \cdot \tau = |J_\Delta|$$

Nous allons démontrer que l'on peut extraire de chaque $I_\Delta(i)$ un sous-ensemble $I_k(i)$ tel que :

- $|I_k(i)| = |J_\Delta(i)|$
- La matrice $A^{(i)}$ indicée par $(I_k(i) \times J_\Delta(i))$ soit régulière et cela pour $i = 1,2\ldots,n_s$.

Considérons le graphe partiel formé par les boucles et les arcs, correspondant aux composantes des vecteurs $\alpha_{\mathfrak{B}}(t,j,r)$ et $\varphi(t,j,r)$, respectivement. Nous appellerons $\beta_v(t,j,r)$ l'ensemble de ces boucles et $\mathcal{V}_f(t,j,r)$ l'ensemble de ces arcs.

- Nous pouvons démontrer que dans ce graphe partiel il n'existe pas de cycles (autrement il existerait une relation linéaire entre les colonnes de M_4 qui serait alors singulière).

...

- Nous pouvons démontrer également que chaque composante connexe peut avoir au maximum une boucle, pour la même raison.

Ainsi,on peut dire que les composantes connexes comprenant une boucle définissent une matrice régulière formée par les lignes correspondant aux noeuds de la composante connexe et par les colonnes associées aux arcs et à la boucle de la composante connexe.

En ce qui concerne les composantes connexes (c.c.) sans boucle, nous pouvons construire facilement des matrices régulières en prenant les colonnes associées aux arcs de la composante connexe et les lignes associées à l'ensemble des noeuds formé par l'ensemble des noeuds de la c.c. moins l'un de ces noeuds, le choix étant arbitraire. Il y aura autant de boucles fictives que de composantes connexes dans le graphe obtenu après avoir enlevé les arcs incidents au noeud éliminé. Ce nombre sera égal au nombre d'arcs incidents au noeud éliminé, dans l'ancienne c.c..

En traitant ainsi toutes les c.c. du graphe initial $\mathcal{P} \times \{\mathcal{V}_f \cup \beta_v\}$ on obtient ainsi un graphe composé d'arbres ayant comme racines les boucles.

Ces forêts auront un ensemble de noeuds N.

$\overline{N}$ (t,j,r) est l'ensemble des noeuds éliminés du graphe $\mathcal{P} \times \mathcal{V}_f$.

On a :

$$\mathcal{P} = N \cup \overline{N} \qquad \text{avec} \qquad N \cap \overline{N} = \emptyset$$

Nous appellerons branches H_i les éléments de $\mathcal{V}_f$ n'ayant pas été transformés en boucles fictives.

$$H = \mathcal{V}_f - \beta_f$$

avec : β (t,j,r) l'ensemble des boucles de la forêt $\mathcal{F}$ (t,j,r)

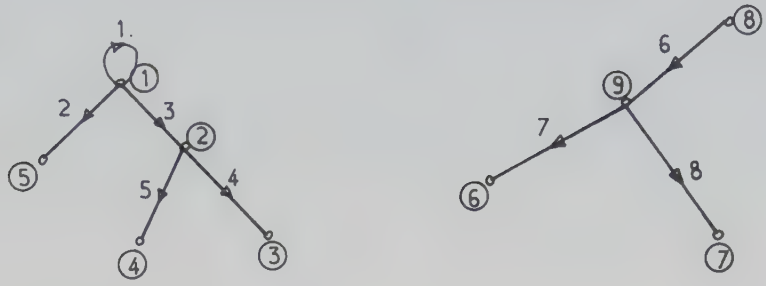
β_v(t,j,r) l'ensemble des boucles vraies de $\mathcal{F}$ (t,j,r)

β_f(t,j,r) l'ensemble des boucles fictives de $\mathcal{F}$ (t,j,r)

Ainsi la forêt $\mathcal{F}$ (t,j,r) est définie par l'ensemble de noeuds N (t,j,r), par l'ensemble de branches H (t,j,r) et l'ensemble de boucles β(t,j,r). Cet ensemble est formé par les deux sous-ensembles β_v(t,j,r) et β_f(t,j,r).

...

Nous pouvons traiter un exemple ayant un graphe à 2 composantes connexes et une boucle.

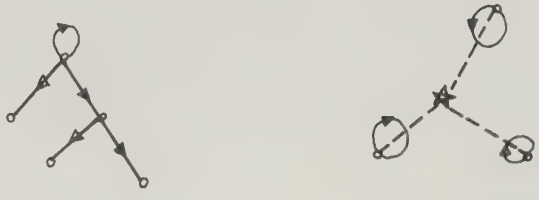


En éliminant le noeud (8) on obtient :

Système 1

En éliminant le noeud (9) on obtient :

Système 2



Système 1

2 comp. connexes

1 boucle vraie 1 boucle fictive

Système 2

4 compo. connexes

1 boucle vraie 3 boucles fictives

	1	2	3	4	5
①	+1	-1	-1		
⑤		+1			
②			+1	-1	-1
③				+1	
④					+1

	6	7	8
⑨	+1	-1	-1
⑥		+1	
⑦			+1

$N = \{①,②,③,④,⑤,⑥,⑦,⑨\}$ $\overline{N} = \{⑧\}$

$H = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

$\beta = \{1, 6\}$, $\beta_v = \{1\}$, $\beta_f = \{6\}$

	1	2	3	4	5
①	+1	-1	-1		
⑤		+1			
②			+1	-1	-1
③				+1	
④					+1

	6
⑧	-1

	7
⑥	+1

	8
⑦	+1

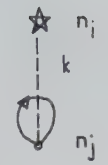
$N = \{①,②,③,④,⑤,⑥,⑦,⑧\}$ $\overline{N} = \{⑨\}$

$H = \{2, 3, 4, 5\}$

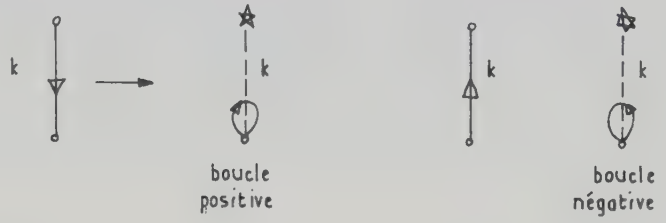
$\beta = \{1, 6, 7, 8\}$ $\beta_v = \{1\}$ $\beta_f = \{6, 7, 8\}$

...

On représentera par la figure :



La boucle fictive β_{f_k} formée à partir de l'arc k ayant comme extrémités n_i et n_j par l'élimination du noeud n_i. Le sens de rotation du symbole dépend du sens d'orientation de l'arc k.



La matrice d'incidence d'un arbre étant régulière, nous pouvons conclure qu'en suivant ces règles nous savons construire une matrice "A" régulière formée de blocs angulaires réguliers "A(i)" de la forme :

$A(i) =$

α_{β_b}	φ	$\overline{\varphi}$	
β_v, β_f	H	$\overline{v_f}$	
$\pm U$	Matrice possèdent une structure de Flot +1 et -1 par colonne		N
		$\pm U$	$\overline{T_r}$

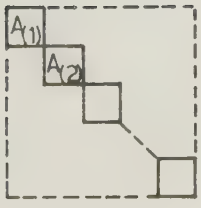
ceci en raison de la bijection existant entre les composantes de $\overline{\varphi}$ et $\overline{T_r}$.

Nous noterons les blocs de A(i) de la façon suivante :

$A(i) =$

β	H	$\overline{v_f}$	
$A_{11}(i)$	$A_{12}(i)$	$A_{13}(i)$	N
$A_{21}(i)$	$A_{22}(i)$	$A_{23}(i)$	
$A_{31}(i)$	$A_{32}(i)$	$A_{33}(i)$	$\overline{T_r}$

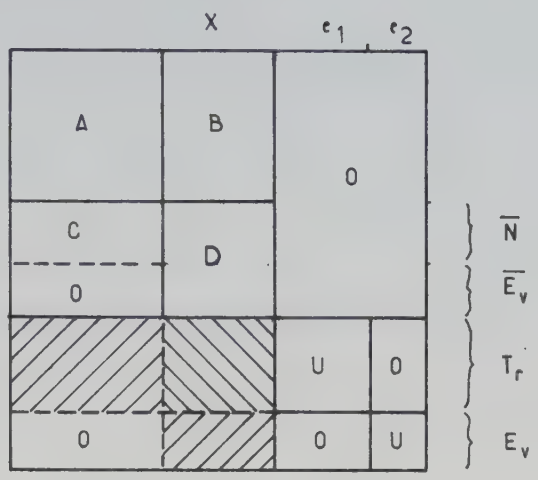
$A =$



Remarque :

Les blocs A(i) ont une taille variable dépendant du nombre de boucles β_v dans la base.

La matrice de base est de la forme :



On a partitionné $\mathcal{B}_r$ et $\mathcal{B}_r^{-1}$ de telle sorte que :

$$\mathcal{B}_r = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} & M_3 \\ \hline M_2 & M_1 \\ \hline \end{array} \qquad \mathcal{B}_r^{-1} = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix} & M'_3 \\ \hline M'_2 & M'_1 \\ \hline \end{array}$$

avec

$$M_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \qquad \text{et} \qquad M'_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline A' & B' \\ \hline C' & D' \\ \hline \end{array}$$

Nous avons établi les expressions des blocs de $\mathcal{B}_r^{-1}$ en fonction de D', M_2, A^{-1}, B et C. D'autre part, en raison de la structure de A, nous savons résoudre des systèmes d'équations linéaires du type Ax = b ou xA = b sans inverser A. Nous pouvons donc effectuer des multiplications par $\mathcal{B}_r^{-1}$ en gardant en mémoire D', B, C, M_2 et la structure de A.

4 - INFORMATION A GARDER EN MEMOIRE

On conservera en mémoire :

- La matrice D'
- La valeur de x
- Le vecteur des multiplicateurs Π_2 correspondant aux contraintes $\overline{E_v}$ et à la 1ère loi de Kirchhoff pour $\overline{N}$.

...

- Les données du problème, soit :
  - . Les matrices d'incidence T
  - . $\underline{x}$ et $\overline{x}$, d(t,j,r), p(t,r) τ, $|Q|$, $|S(t)|$, c(t), $\mu(t,j)$, $\lambda(t,j)$, $|V_f|$, $|V_d|$, $|V_p|$, $|\mathcal{P}$

- L'ensemble des indices des variables de base, la partition $\overline{I} = K^+ \cup K^-$ ainsi que :

  N, $\overline{N}$, T_r, $\overline{T_r}$, E_v, $\overline{E_v}$, β, β_v, β_f, $\mathcal{V}_f$, $\overline{\mathcal{V}_f}$, H

- La numérotation des forêts (voir 4.4).

4.1 - La matrice D'

D' est une matrice de taille fixe, (égale à $|V_f| \cdot \tau$). Cette matrice pouvant être creuse pour certaines bases, nous nous contentons de garder en mémoire ses éléments non nuls et leur position (indice de ligne et indice de colonne). Le creux observé est de l'ordre de 70 %.

4.2 - Le vecteur x

Le vecteur x est l'inconnue principale de notre optimisation. Le calcul des autres variables de base est très simple lorsque l'on connaît la valeur de x.

4.3 - Le vecteur Π_2

Appelons Π_1, Π_2, Π_3 les multiplicateurs associés aux lignes de A, C et M_2. Connaissant Π_2 (vecteur de même dimension que x), il est alors possible de calculer le vecteur complet des multiplicateurs.

4.4 - La numérotation des forêts

A chaque bloc A(i) pour i = 1,2,..., n_s est associée une forêt. Dans tout arbre, on peut établir une relation d'ordre entre les noeuds, d'une part, entre les arcs et les boucles, d'autre part.

Nous établirons, dans chaque arbre, une orientation des arcs. On définit comme racine de l'arbre le sommet de rattachement de la boucle. On appelle sommets pendants tous les sommets de degré 1 (autre que la racine si celle-ci est de degré 1). La racine sera dite partie amont de l'arbre et les sommets pendants seront la partie aval. Les arcs seront orientés de façon que, sur les chaînes allant de la racine aux sommets pendants, tous les arcs aient un sens positif dans le sens du trajet.

Ainsi, tout arc aura un sommet amont et un sommet aval.
D'autre part, nous établirons une bijection entre les sommets et les éléments des forêts, en appelant "élément" un arc ou une boucle.
Cette bijection fait correspondre à chaque arc son sommet aval et à chaque boucle son sommet de rattachement.

La relation d'ordre se définit comme suit :

Soit i un élément d'un arbre et j sa boucle, tout élément k appartenant au chemin [j, i] (bornes incluses) sera dit en amont de i. On note :

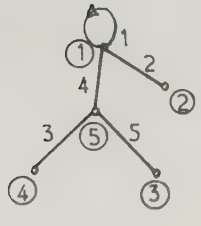
$k \succ i$ (on lira également i en aval de k)

Ceci définit une relation d'ordre partiel dans chaque arbre.

Il existe une relation d'ordre complet entre les éléments d'un chemin [boucle, sommet pendant].

En remplaçant chaque élément par son sommet correspondant dans la bijection, on définit la relation d'ordre partiel existant entre les noeuds d'un arbre.

Ainsi sur l'arbre suivant on peut écrire :



$$\left.\begin{array}{l} 3 \propto 4 \\ 5 \propto 4 \\ 4 \propto 1 \\ 2 \propto 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \propto 1 \\ 5 \propto 1 \end{array}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} ④ \propto ⑤ \\ ③ \propto ⑤ \\ ⑤ \propto ① \\ ② \propto ① \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ④ \propto ① \\ ③ \propto ① \end{array}$$

Nous pouvons établir une numérotation de chaque forêt qui traduise cette relation d'ordre existant dans chaque arbre [5]. Cette numérotation suivra les règles suivantes :

- Nous considérons tour à tour tous les éléments de la forêt et nous associons à chacun d'eux un numéro par ordre croissant.
- Un élément de la forêt ne peut être considéré que si tous ses éléments en aval l'ont déjà été.

...

- Les racines sont considérées après toutes les branches.

Les numérotations ainsi définies sont telles que :

Tout élément i situé en aval d'un élément j de la forêt, aura un numéro n_i tel que :

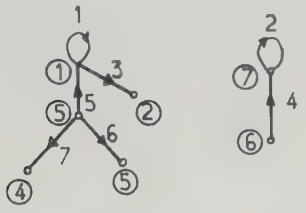
$$n_i \leq n_j \quad \text{pour} \quad i \propto j$$

n_j étant le numéro associé à j.

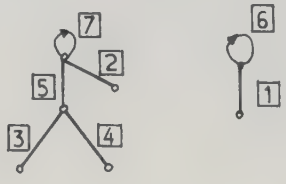
Matriciellement, si nous écrivons la matrice d'incidence $N \times (\beta_v, \mathcal{V}_f)$ suivant l'ordre défini par la numérotation, on obtient une matrice triangulaire.

Exemple :

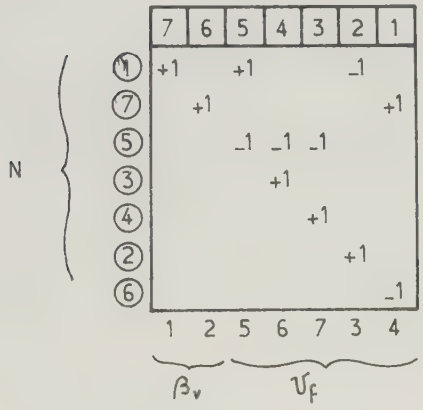
Prenons les arbres suivants :



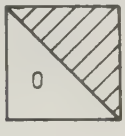
Nous associons la numérotation suivante :



La matrice d'incidence $\mathcal{N} \times (\beta_v, \mathcal{V}_f)$ est alors :



Cette matrice est triangulaire supérieure



Remarque : la numérotation d'une forêt n'est pas unique.

...

5 - STRUCTURE DE A ET RESOLUTION DE SYSTEMES A DROITE ET A GAUCHE

La matrice A a une structure bloc-angulaire. Soient $A(i)$ pour $i = 1,2,\ldots,n_s$ les blocs de A.

La matrice A^{-1} a, elle aussi, une structure bloc-angulaire avec des blocs égaux à $A(i)^{-1}$ pour $i = 1$ à n_s.

Une première conséquence est que, pour calculer :

$$y_1 = A^{-1} k_1$$

nous pouvons partitionner y et k en

$$y_1(i) \text{ et } k_1(i) \quad \text{pour } i = 1,2,\ldots,n_s$$

et écrire :

$$y_1(i) = A(i)^{-1} k_1(i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n_s$$

Nous allons, plutôt que d'avoir à inverser les blocs A(i), résoudre des systèmes d'équations linéaires du type :

$$A(i)\, y_1(i) = k_1(i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n_s$$

(systèmes à droite)

Il en est de même pour un calcul du type :

$$y_2 = k_2 A^{-1}$$

remplacé par la résolution de n_s systèmes d'équations définis par :

$$y_2(i)\, A(i) = k_2(i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n_s$$

(systèmes à gauche).

Si nous partitionnons en trois les vecteurs $y_1(i)$, $y_2(i)$, $k_1(i)$ et $k_2(i)$ suivant le partitionnement de A(i) et rappelant que

$A_{11}(i) = \pm U$, $A_{33}(i) = \pm U$, $A_{21}(i) = 0$, $A_{31}(i) = 0$ et $A_{32}(i) = 0$ $\forall_i$ ces systèmes deviennent

1) les systèmes à droite sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} y_1(i)^1 \\ y_1(i)^2 \\ y_1(i)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(i)^1 \\ k_1(i)^2 \\ k_1(i)^3 \end{bmatrix} \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n_s \quad (1)$$

...

D'où :

$$y_1(i)^3 = \pm k_1(i)^3$$

et alors on peut écrire en éliminant les indices (i) [5]

$$N \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \pm U & A_{12} \\ \hline & A_{22} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1^2 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{array}{|c|} \hline A_{13} \\ \hline A_{23} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \pm k_1^3 \end{bmatrix} \left. \right\} N \qquad (II)$$

β H — $\overline{\sqrt{f}}$

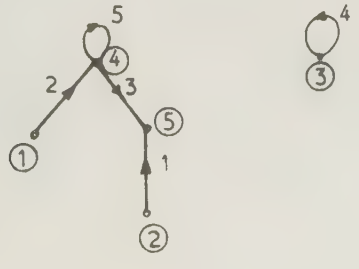
En raison de la strucutre triangulaire de la matrice $N \times (\beta, H)$ on peut résoudre facilement ce système d'équations après avoir calculé le second membre. De plus, le bloc $\begin{bmatrix} A_{12} \\ \hline A_{22} \end{bmatrix}$ ayant une structure de flot (chaque colonne a un élément égal à +1 et un élément égal à -1, tous les autres étant nuls) et A_1^1 étant égale à $\pm$ U, cette résolution est très simple.

En effet, il suffit de résoudre les équations indicées par N, d'aval en amont suivant l'ordre donné par la numérotation. Ainsi, les valeurs des inconnues associées aux arcs ayant une extrémité pendante sont obtenues par simple affectation de signe. En ajoutant ces valeurs à la composante du second membre associée au sommet amont et en éliminant ces arcs, on transforme l'arbre et on reconsidère les nouveaux sommets pendants.

Une forêt ayant |N| sommets et p composantes connexes possède |N|-p arcs. La résolution du système est donc réalisée avec un nombre d'additions ou de soustractions égale à |N|-p et donc bornée par |N|-1.

Ex :

Soit la forêt :



et le second membre b =

①	②	③	④	⑤
-3	5	7	1	8

On a : $y_1 = -5 = -b_{②}$

-3	5	7	1	13

$y_{⑤} = 8 + 5$

$y_2 = +3 = -b_{①}$

-3	5	7	-2	13

$y_{④} = 1 - 3$

$y_3 = 13 = -y_1 + b_{⑤}$

-3	5	7	11	13

$y_{④} = -2 + 13$

$y_4 = -7 = -b_{③}$

-3	5	7	11	13

$y_5 = 11 = -y_2 + y_3 + b_{④}$

Avec 3 opérations, on résout le système associé à cette forêt. Matriciellement on a :

	5	4	3	2	1		y	
④	1		-1	+1			11	5
③		-1					-7	4
⑤			+1		+1		13	3
①				-1			3	2
②					-1		-5	1

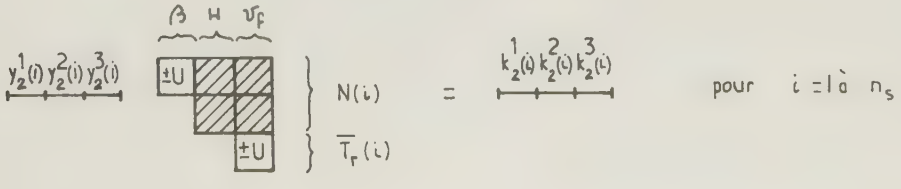
1		④
7		③
8		⑤
-3		①
5		②

D'autre part, pour calculer le deuxième membre du système (II) il nous faudra un nombre d'additions et soustractions borné par :

$$2\,|\overline{\nu_f}| + |N|$$

et ceci en raison de la nature du bloc $\begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix}$ qui a des colonnes ayant au maximum deux éléments non nuls, ces éléments étant +1 et -1.

2) Les systèmes à gauche s'écrivent :



...

Pour chaque système i, nous procédons d'abord à la résolution du système :

$$\underbrace{y_2^1\ y_2^2}\ \overbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline \pm U & A_{12} \\ \hline & A_{22} \\ \hline\end{array}}^{\beta\ H}\ \Big\}\ N \;=\; \underbrace{k_2^1\ k_2^2} \qquad (III)$$

en éliminant les indices i de la notation.

Par suite :

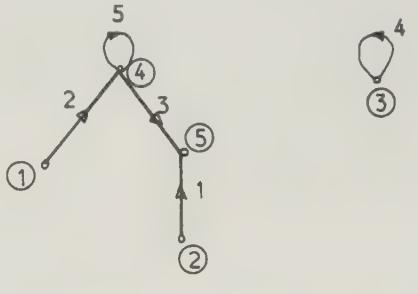
$$\underbrace{y_2^3}\ \underbrace{\boxed{\pm U}}_{\overline{v}_f}\ \Big\}\ \overline{T}_r \;=\; \underbrace{k_2^3} \;-\; \underbrace{\hat{y}_2^1\ \hat{y}_2^2}\ \underbrace{\begin{array}{|c|}\hline A_{13} \\ \hline A_{23} \\ \hline\end{array}}_{\overline{v}_f}\ \Big\}\ N \qquad (IV)$$

où $\hat{y}_2^1$ et $\hat{y}_2^2$ sont le résultat du système (III) . On peut borner le nombre des calculs nécessaires à la résolution de (III) et de (IV) comme précédemment par $|N|-p$ et $2|\overline{v}_f|+N$ respectivement. La différence entre la résolution (III) et de (I) est que dans (III) on résout les équations indicées par N, dans l'ordre d'amont en aval donné par la numérotation.

Dans ce type de résolution les valeurs des inconnues associées aux racines sont obtenues par simple affectation de signe. En ajoutant au second membre la valeur correspondant au noeud amont de chaque arc on obtient la valeur associée au noeud aval. On résout un système à gauche en un nombre d'opérations arithmétiques borné par $|N|-p$ plus $2\ |\overline{v}_f|+N$ pour calculer le second membre de (IV) .

Ex :

Soit la forêt :



et le second membre :

	1	2	3	4	5
b =	-3	5	7	1	8

On a :

				1	2	3	4	5
5	$y_{④} = 8$	$= b_5 = 8$		-3	5	7	1	8
4	$y_{③} = -1$	$= -b_4 = -1$		-3	5	7	-1	8
3	$y_{⑤} = +15$	$= +y_{④} + b_3 = 8 + 7 = 15$		-3	5	15	-1	8
2	$y_{①} = 3$	$= +y_{④} - b_2 = + 8 - 5$		-3	3	15	-1	8
1	$y_{②} = 18$	$= +y_{⑤} - b_1 = 15 + 3$		18	3	15	-1	8

y

④	③	⑤	①	②
8	-1	15	3	18

	5	4	3	2	1
④	+1		-1	+1	
③		-1			
⑤			+1		+1
①				-1	
②					-1

=

b

5	4	3	2	1
8	1	7	5	-3

6 - ALGORITHME DE RESOLUTION

6.1 - Démarrage de l'algorithme

On suppose connus les éléments suivants :

- $T, \mathcal{N}, V_f, V_d, V_p, S(t), Q, \tau, \underline{x}, \overline{x}, d(t,j), p(t,r), c(t), \mu(t,j), \lambda(t,j), \mathcal{E}_v, \mathcal{C}_r$.

On se donne une base I du problème ainsi qu'un partitionnement K^+, K^- de $\overline{I}$ qui permettent d'obtenir une solution de base réalisable.

...

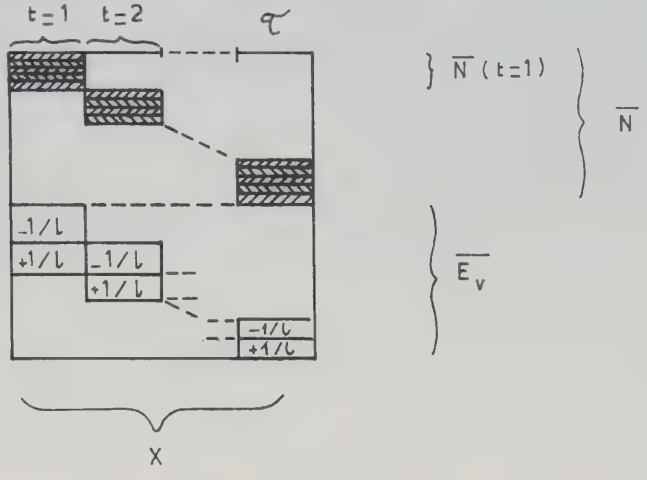
Nous savons définir les ensembles E_v, $\overline{E_v}$, T_r, $\overline{T_r}$ ainsi que N, $\overline{N}$ avec une numérotation des forêts suivant les règles énoncées au début de ce chapitre. Nous savons donc définir $\mathcal{B}_r$ et son partitionnement.

D'autre part, nous savons calculer l'expression :

$$D - C A^{-1} B = (D')^{-1}$$

Cette matrice a une structure du type

$(D')^{-1}$ =



où la partie supérieur de $(D')^{-1}$ est le résultat du produit $-C_{sup}\ A^{-1}\ B$ avec :

C_{sup} est la sous-matrice de C dont les lignes sont indicées par $\overline{N}$. Nous rappellerons que $C_{inf} = 0$ (C_{inf}=sous-matrice de C dont les lignes sont indicées par $\overline{E_v}$).

La partie $(D')^{-1}$ inférieure est égale à D_{inf}.

Nous inversons $(D')^{-1}$ et nous gardons ce résultat en mémoire.

Le vecteur des multiplicateurs Π_2 sera ensuite calculé par la formule :

$$\Pi_2 = f^1_{\mathcal{B}_r}\ B' + f^2_{\mathcal{B}_r}\ D'$$

où $f^1_{\mathcal{B}_r}$ $f^2_{\mathcal{B}_r}$ $f^3_{\mathcal{B}_r}$ sont les coûts des variables de base et en remarquant que $\Pi_3 = 0$ en raison de $M_3 = 0$ $M_1 = U_1$ et $f^3_{\mathcal{B}_r} = 0$.

En remplaçant B' par son expression on a =

$$\Pi_2 = [-f^1_{\mathcal{B}_r}\ A^{-1}\ B + f^2_{\mathcal{B}_r}]\ D'$$

...

On connaît D', $f^2_{\mathcal{B}}$, $f^1_{\mathcal{B}}$, B et l'on sait résoudre des systèmes à droite de A. On sait donc calculer Π_2 qui sera mis en mémoire.

Nous remarquerons que le vecteur $f^1_{\mathcal{B}}$ n'a des composantes non-nulles (μ ou λ) que pour les composantes associées aux variables $\alpha_{\mathcal{B}_i}$ (variables α_i de base), et que $f^2_{\mathcal{B}}(t)$ est égal à $c(t-1) - c(t)$.

Le calcul du vecteur x peut être fait de façon similaire on a alors :

$$x = D' \left[\left(b_{0_2} - M^{K^+}_{\textcircled{2}} \delta^+_{K^+} - M^{K^-}_{\textcircled{2}} \delta^-_{K^-} \right) - C A^{-1} \left(b_{0_1} - M^{K^+}_{\textcircled{1}} \delta^+_{K^+} - M^{K^-}_{\textcircled{1}} \delta^-_{K^-} \right) \right]$$

avec : $b_0 = \begin{bmatrix} b_{0_1} \\ \hline b_{0_2} \\ \hline b_{0_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N, \overline{T_r} \\ \} \overline{N}, \overline{E_v} \\ \} T_r, E_v \end{matrix}$ et $M = \begin{bmatrix} M_{\textcircled{1}} \\ \hline M_{\textcircled{2}} \\ \hline M_{\textcircled{3}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N, \overline{T_r} \\ \} \overline{N}, \overline{E_v} \\ \} T_r, E_v \end{matrix}$

$$b_{0_2}(i) = \begin{cases} -\underline{x}(i) & \text{pour } i \in \overline{E_v}(t=1) \\ 0 & \text{pour } i \in \overline{E_v}(1 < t < \tau + 1) \quad \cup \ \overline{N} \\ \overline{x}(i) & \text{pour } i \in \overline{E_v}\ (\tau + 1) \end{cases}$$

$$b_{0_1} = 0$$

$$\left[M^{K^+}_{\textcircled{2}} \delta^+_{K^+} + M^{K^-}_{\textcircled{2}} \delta^-_{K^+} \right]_i \neq 0 \text{ pour } i \in \overline{N} \text{ uniquement}$$

$$\left[M^{K^+}_{\textcircled{1}} \delta^+_{K^+} + M^{K^-}_{\textcircled{1}} \delta^-_{K^+} \right]_i \neq 0 \text{ pour } i \in N \text{ uniquement}$$

Remarque :

Un cas simple correspond à $\overline{N} = \emptyset$ => $\overline{E_v} = |V_f| . \tau$ et $x(i) = \underline{x}(i)$ ou $\overline{x}(i)$ $\forall_i \in \overline{E_v}$.

Nous pouvons à présent appliquer l'algorithme du simplexe tel qu'il a été exposé en Annexe II.1.

6.2 - Calcul des multiplicateurs et choix de la variable candidate

Nous avons vu que Π_3 est nul $\forall I$ et nous avons la valeur de Π_2 en mémoire Le vecteur Π_1 peut être partitionné en n_s vecteurs correspondant aux blocs de A. Nous avons l'expression :

$$\Pi_1 A + \Pi_2 C = f^1_{\mathcal{B}_r}$$

...

qui devient :

$$\Pi_1(i)\ A(i) = f^1_{\mathcal{B}_r}(i) - \Pi_2(i)\ C^{y^1(i)}_{\overline{N}(i)} \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n_s$$

où $C^{y^1(i)}_{\overline{N}(i)}$ est la sous-matrice de C dont les lignes sont indicées par $\overline{N}(i)$ et dont les colonnes sont associées aux variables $y^1(i)$. Nous noterons que C n'a des éléments non nuls que dans $C^{y^1(i)}_{\overline{N}(i)}$, ceci en raison de la structure bloc-angulaire de $C_{\overline{N}}$.

Le calcul de Π_1 peut donc être réalisé bloc par bloc.

On remarquera que toutes les variables hors base sont du type σ, γ, e_1 ou e_2 On regroupera les calculs des coûts relatifs de toutes les variables σ, γ et e_1 associées à un bloc A(i). Les coûts relatifs des variables hors-base sont faciles à calculer puisque dans la formule :

$$\overline{f}(I)_i = f_i - \Pi(I)\ M^i \qquad \text{pour } i \in \overline{I}$$

$$M^i = \pm u_j \qquad \text{colonne unité}$$

On a donc :

$$\overline{f}(I)_i = f_i \pm \Pi(I)_j$$

Le critère standard consiste à choisir $s \in \overline{I}$, tel que, si $s \in K^-$: $\overline{f}s(I) < 0$, si $s \in K^+$: $\overline{f}_s(I) > 0$, et $|\overline{f}s(I)|$ soit maximal. Si aucune variable n'est retenue, la solution définie par I, K^+ et K^- est optimale et on arrête l'algorithme.

6.3 - Calcul de la colonne transformée

Appelons P_s la colonne s de M, et $\overline{P_s}$ la colonne transformée :

$$\overline{P_s} = \mathcal{B}_r^{-1}\ P_s$$

Nous avons vu que les colonnes P_j des variables hors-base sont des colonnes unité au signe près que nous notons $\pm u_j$. Il en découle que le produit $\mathcal{B}_r^{-1}\ P_s$ est égal à la colonne j de l'inverse de la base, au signe près :

$$\overline{P_s} = \pm\ \mathcal{B}_r^{-1j}$$

...

Trois grands cas peuvent se présenter à savoir :

- La variable candidate est du type σ_i ou γ_i
- La variable candidate est du type e_{1_i}
- La variable candidate est du type e_{2_i}

1) - La variable candidate est une boucle (σ_i ou γ_i)

On distingue deux cas :

. La boucle entrante est rattachée à un noeud de N

On a alors :

$$\mathcal{B}_r^{-1j} = \begin{bmatrix} \underline{A'^j} \\ \underline{C'^j} \\ M_2'^j \end{bmatrix}$$

. La boucle entrante est rattachée à un noeud de $\overline{N}$.

On a :

$$\mathcal{B}_r^{-1j} = \begin{bmatrix} \underline{B'^j} \\ \underline{D'^j} \\ M_2'^j \end{bmatrix}$$

2) - La variable candidate est du type e_{1_i}

Il s'agit forcément d'une variable associée à une contrainte appartenant à $\overline{T_r}$.

On a donc :

$$\mathcal{B}_r^{-1j} = \begin{bmatrix} \underline{A'^j} \\ \underline{C'^j} \\ M_2'^j \end{bmatrix}$$

3) - La variable candidate est du type e_{2_i}

La contrainte associée est dans $\overline{E_v}$. D'où :

$$\mathcal{B}_r^{-1j} = \begin{bmatrix} \underline{B'^j} \\ \underline{D'^j} \\ M_2'^j \end{bmatrix}$$

En développant les expressions de $\mathcal{B}_r^{-1j}$ à l'aide des formules de partitionnement, on a :

$$A'^j = A^{-1j} - A^{-1} B C'^j$$

$$B'^j = - A^{-1} B D'^j$$

...

Le vecteur A^{-1j} a des éléments non nuls uniquement dans les lignes associées à un bloc i de A^{-1}.

Nous noterons $A^{-1j}_{I(i)}$ le vecteur ayant ces éléments pour composantes. on peut calculer sa valeur par une simple résolution à droite du système :

$$A(i) \quad A^{-1j}_{I(i)} = u_j$$

avec I(i) = l'ensemble des indices des colonnes du bloc i de A. pour i = 1 a n_s.

Revenons aux formules de A'^j et B'^j. Après avoir déterminé C'^j et D'^j, le calcul du vecteur A^{-1} B C'^j (ou A^{-1} B D'^j) s'effectuent bloc par bloc, en utilisant la même technique pour chaque bloc.

En ce qui concerne M'^j_2, on a :

$$M'^j_2 = - M_2 \quad M'^j_4$$

d'où : $\quad M'^j_{2_i} = - M_{2_i} \quad M'^j_4$

Une ligne i de M_2 correspond, soit à une contrainte de transit du type :

$$\pm \Psi_i - x_i + e_{1_i} = 0$$

Soit à une contrainte d'évolution :

$$\begin{aligned} - x_i(1) \qquad\qquad + e_{2_i} &= -\underline{x}_i \\ + x_i(t) - x_i(t+1) + e_{2_i} &= 0 \\ + x_i(\tau) \quad + e_{2_i} &= \overline{x}_i \end{aligned}$$

où les colonnes associées à e_{1_i} et e_{2_i} sont indicées comme celles de M_1.

On en déduit que $M'^j_{2_i}$ est le résultat :

- de la soustraction ou de l'addition de deux composantes de M'^j_4.

ou bien

- de l'affectation d'un signe approprié à une composante de M'^j_4.

On peut, en outre, dire qu'en connaissant C'^j ou D'^j, $M'^j_{4_i}$ peut être calculé si $A'^j_{I(i)}$ ou $B'^j_{I(i)}$ sont connus.

...

On a :

$$-M'^{j}_{2_i} = \begin{cases} \pm A'^{j}_{k_2} - C'^{j}_{k_3} & \text{si i correspond à une contrainte de } T_r. \\ \pm B'^{j}_{k_2} - D'^{j}_{k_3} \end{cases}$$

$$-M'^{j}_{2_i} \begin{cases} \left.\begin{matrix} \pm C'^{j}_{k_2} \\ \pm D'^{j}_{k_2} \end{matrix}\right\} & t = 1 \text{ ou } \tau \quad \text{si i correspond à une contrainte de } E_v. \\ \left.\begin{matrix} + C'^{j}_{k_2} - C'^{j}_{k_3} \\ + D'^{j}_{k_2} - D'^{j}_{k_3} \end{matrix}\right\} & t \in]1,\tau[\end{cases}$$

Le calcul de $\bar{\bar{P}}_s$ peut donc être réalisé en calculant C'^{j} ou D'^{j} d'abord puis en calculant (A'^{j}, M'^{j}_2) ou $B'^{j}, M'^{j}_2)$, bloc par bloc.

6.4 - Calcul du vecteur solution

Le vecteur solution y est comme défini en Annexe II.1.

$$y_{K^+} = \delta^{+}_{K^+}$$

$$y_{K^-} = \delta^{-}_{K^-}$$

$$y_I = (\mathcal{B}_r)^{-1} \{b_o - M^{K^+} \delta^{+}_{K^+} - M^{K^-} \delta^{-}_{K^-}\}$$

En remarquant que $\delta^{-} = 0$ pour les variables hors-base, on a :

$$y_I = (\mathcal{B}_r)^{-1} \{b_o - M^{K^+} \delta^{+}_{K^+}\} = \bar{b} \ (I)$$

$$\text{soit } y_I = \begin{bmatrix} y_{I\,①} \\ \hline y_{I\,②} \\ \hline y_{I\,③} \end{bmatrix} \qquad \text{avec } y_{I\,②} = x$$

On sait que $y_{I\,②}$ est connu ; on s'intéresse uniquement à $y_{I\,①}$ et $y_{I\,③}$

...

En posant

$$\beta_r \; y_I = b_o - M^{K^+} \; \delta^+_{K^+}$$

On a :

$$A \; y_{I\,①} + B \; x = b_{o\,①} - M^{K^+}_{①} \; \delta^+_{K^+}$$

D'où : $A(i) y_I(i) = b_{o\,①}(i) - M^{K^+}_{①}(i) \; \delta^+_{K^+} - B(i) \; x$

$$\text{pour } i = 1, 2, \ldots, n_s$$

On peut calculer le second membre de ce système et résoudre le système à droite comme décrit en 5. On remarquera que le terme $M^{K^+}_{①}(i) \; \delta^1_{K^+}$ ne dépend que des boucles correspondant au bloc i et que $b_{o\,①}(i)$ est nul.

En ce qui concerne $y_{I\,③}$, on a :

$$M_2 \begin{bmatrix} y_{I\,①} \\ \hline y_{I\,②} \end{bmatrix} + y_{I\,③} = b_{o\,③}$$

La matrice M_2 ayant une structure bloc-angulaire, on peut calculer $y_{I\,③}$ en partitionnant ce vecteur en sous-vecteurs et en supposant x et $y_{I\,①}(i)$ connus.

6.5 - Détermination de la variable sortante

Soit $\bar{a}^s_i = [\bar{P}_s]i$; on calcule comme expliqué en Annexe II.1.

$$\theta_M = \min \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

$$\left| \begin{array}{l} \theta_1 = \min\limits_{\substack{\bar{a}^s_i < 0 \\ i \in I}} \dfrac{\delta^-_i - \bar{b}(I)_i}{\bar{a}^s_i} \\ \theta_2 = \min\limits_{\substack{\bar{a}^s_i > 0 \\ i \in I}} \dfrac{\delta^+_i - \bar{b}(I)_i}{\bar{a}^s_i} \\ \theta_3 = \delta^+_s - \delta^-_s \end{array} \right.$$

Il faut, en outre, calculer le rapport $\frac{\delta - \bar{b}}{\bar{a}}$ pour les variables e_{l_j} correspondant aux contraintes de transit qui ne sont pas prises en compte dans le problème réduit. On a :

$$e_{l_j} = x_j \pm \Psi_j$$

et donc : $\bar{a}^s_{e_{l_j}} = \bar{a}^s_{x_j} \pm \bar{a}^s_{\Psi_j}$

7 - CONCLUSION DU SECOND CHAPITRE

Nous avons défini dans ce chapitre un partitionnement de toute matrice de base du problème et décrit une itération de l'algorithme sauf pour la partie concernant l'actualisation des vecteurs x, Π_2, des ensembles T_r, $\overline{T_r}$, N, $\bar{N}$, E_v, $\overline{E_v}$, de la numérotation des forêts et de la matrice D'. Ceci fera l'objet du chapitre III.

...

CHAPITRE III

CHANGEMENTS DE BASE

1 - MISE A JOUR DE $\hat{\mathcal{B}}^{-1}$

Nous avons décrit en annexe II.1 l'opération de mise à jour de $\hat{\mathcal{B}}^{-1}$. De cette matrice nous ne gardons en mémoire que la matrice D' et le vecteur Π_2. Ainsi, on peut dire que de la matrice E nous avons besoin de connaître uniquement un ensemble de lignes pour la mise à jour de D' et Π_2.

Nous noterons que l'ensemble des indices de Π_2 qui est celui indicant les colonnes de D' correspond à $\overline{N} \cup \overline{E}_v$. Cet ensemble varie au cours de l'algorithme Il n'en est pas de même pour l'ensemble des indices des lignes de D' (correspondant au vecteur x). L'entrée ou la sortie d'une variable peut modifier les ensembles $\overline{N}$ et $\overline{E}_v$.

1.1 - Influence de la variable sortante sur $\overline{N}$ et $\overline{E}_v$

Seuls les indices des variables σ_i, γ_i, e_{1i}, e_{2i} sont susceptibles de sortir de la base. Nous analyserons tour à tour leur influence.

1.1.1 - Variable sortante σ_i ou γ_i

La sortie de la base de l'indice de l'une de ces variables a pour conséquence la perte de la boucle associée par la forêt la contenant. Pour conserver la régularité de la matrice correspondante la forêt doit perdre un noeud de N au profit de l'ensemble $\overline{N}$. Ce noeud appartient à l'arbre perdant la boucle.

1.1.2 - Variable sortante e_{1i}

La sortie d'une variable e_{1i} fait passer un élément de Tr à $\overline{Tr}$. D'autre part, le vecteur φ perd une composante au profit de $\overline{\varphi}$ Comme dans le cas précédent la forêt est privée d'un élément et perd un noeud de N qui passe à l'ensemble $\overline{N}$.

1.1.3 - Variable sortante e_{2i}

Lorsque l'indice d'une variable e_{2i} sort de la base, l'ensemble E_v perd un élément au profit de $\overline{E_v}$.

1.2 - Influence de la variable entrante sur $\overline{N}$ et $\overline{E_v}$

Les variables dont les indices sont susceptibles d'entrer dans la base sont ainsi σ_i, γ_i, e_{1i}, e_{2i} et nous les regrouperons de la même façon que dans le point 1.1.

Nous noterons que si la variable entrante correspond au même élément d'une forêt que celui associé à la variable sortante, la forêt ne change pas au cours de l'itération. D'ailleurs, les modifications décrites en 1.1.1 ne peuvent être traitées que si l'on répercute avant sur la forêt l'influence de la variable candidate. Cet ordre étant interdit dans certains cas,nous traiterons ce type de changement de base dans le point 1.4.

1.2.1 - Variable entrante σ_i ou γ_i

Lorsqu'une boucle entre dans une forêt,l'ensemble N s'accroît d'un élément au détriment de $\overline{N}$.

1.2.2 - Variable entrante e_{1i}

La forêt gagne un arc et,globalement,l'ensemble N gagne un élément. Dans des cas particuliers l'ensemble N' est formé par l'ensemble N moins un noeud lui appartenant,plus deux noeuds appartenant à $\overline{N}$. Le plus fréquemment N' est obtenu en ajoutant à N un noeud de $\overline{N}$.

1.2.3 - Variable entrante e_{2i}

L'ensemble $\overline{E_v}$ perd un élément au profit de E_v lorsque e_{2i} est la variable entrante.

1.3 - Eléments de $\mathcal{B}_r^{-1}$ définissant D'(I')

Nous avons vu que la variable sortante fait gagner un élément à l'ensemble $\overline{N} \cup \overline{E}_v$, tandis que la variable entrante lui fait perdre un élément. Ceci respecte bien la propriété de la dimension constante de D à chaque changement de base.

La matrice D'(I') est formée des colonnes de D' actualisées par le pivotage à l'exception d'une ou deux de ces colonnes, plus une ou deux colonnes de $\mathcal{B}_r^{-1}$ actualisées par le pivotage correspondant aux matrices C' ou M_3' inférieure.

L'actualisation de chacune de ces colonnes nécessite la connaissance des lignes de E correspondant aux lignes de D'(I'). On remarquera que l'ensemble des indices de ces lignes ne varie pas. Nous noterons que le pivot ne peut pas correspondre avec les indices de ces lignes et que cette sous-matrice de E peut être calculée facilement.En effet, les termes intervenant dans son expression ont déjà été calculés lors du calcul de t^s dans la recherche de la variable sortante.

Le calcul de D'(I') fait intervenir une ligne de $\mathcal{B}_r^{-1}$ correspondant au pivot plus la sous-matrice $[C' \vdots D' \vdots M'_{3inf}]$ où M'_{3inf} est la partie inférieure de M_3', plus la sous-matrice de E, définie ci-dessus.

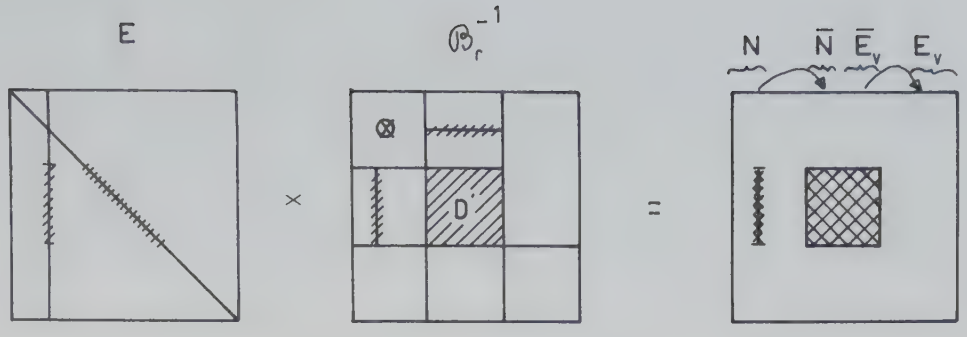
D'autre part, seules les colonnes composant D'(I') nous intéressent. Il nous suffira donc de connaître :

- L'ancienne matrice D'
- La portion de ligne de $\mathcal{B}_r$ située au-dessus de D' correspondant au pivot.
- Une, ou deux, colonnes de C' ou M'_{3inf} plus l'élément au-dessus ou au-dessous de cette colonne et correspondant au pivot (voir schéma).

Ex 1 :

CANDIDAT = e_{2i}

SORTANT = α_j



où ⊗ sont les parties à connaître

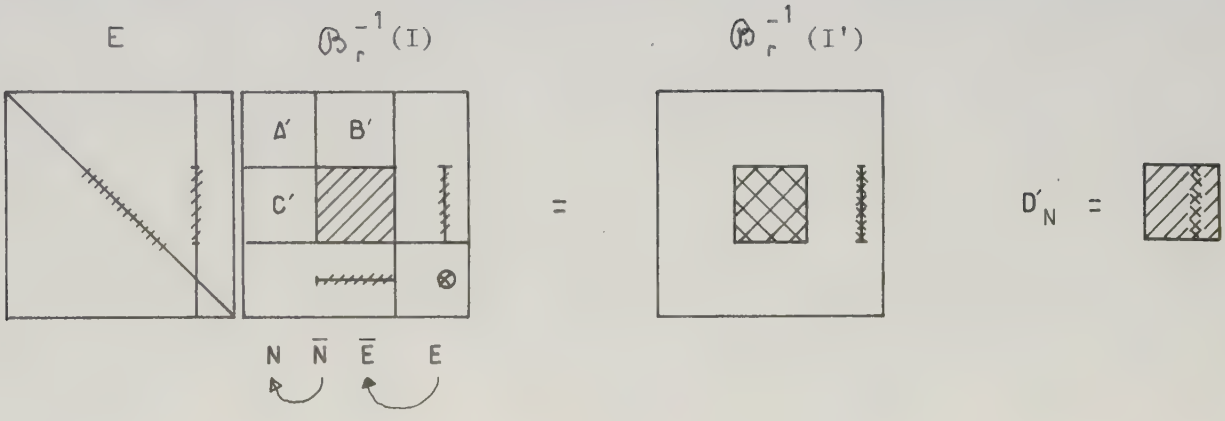
D'_N = sont les résultats du calcul et les parties formant la matrice D'(I')

transfert d'un élément d'un ensemble à un autre

Ex 2 :

VARIABLE CANDIDATE= e_{1i}

VARIABLE SORTANTE = e_{2j}



1.4 - Variable entrante et variable sortante associées au même élément du graphe

Deux cas peuvent se présenter ici :

1°) - L'élément de la forêt est une boucle. La matrice D' reste inchangée dans ce cas.

2°) - L'élément de la forêt est un arc. Les variables sont alors e^n_{1i} et e^p_{1i}.

...

La différence entre les matrices de base $\mathcal{B}_r(I)$ et $\mathcal{B}_r(I')$ est que la contrainte $\overline{T_{ri}}$ du nouveau problème réduit associée à l'arc est maintenant celle qui était omise dans le problème précédent.

L'ensemble des colonnes de D' ne change pas, mais la matrice D' peut nécessiter une actualisation. Elle sera faite en considérant les deux contraintes de transit dans $\mathcal{B}_r^{-1}(I)$ et en faisant le pivotage défini par E. Le pivot est l'élément de la colonne transformée correspondant à la contrainte omise. Sa valeur est facile à calculer en fonction des composantes de t^s.

2 - MISE A JOUR DES MULTIPLICATEURS Π_2

Seul le vecteur Π_2 des multiplicateurs est à mettre à jour. Ce point peut être réalisé tel qu'il a été décrit en annexe II.1.

Pour reconstituer $\Pi_2(I')$ il faudra suivre les mêmes permutations de colonnes de $\mathcal{B}_r^{-1}$ que dans le calcul de D'(I').

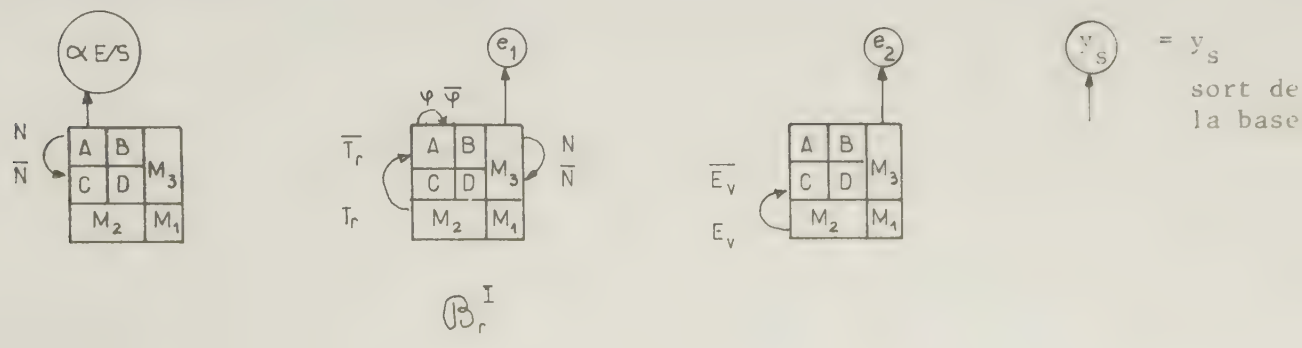
3 - MISE A JOUR DU VECTEUR SOLUTION

Seul le vecteur solution correspondant à x doit être mis à jour. La colonne transformée a les composantes correspondant à x mis en mémoire. On a :

$$x(I')_i = x(I)_i - \theta\, \overline{a}_i \qquad \text{pour tout } i$$

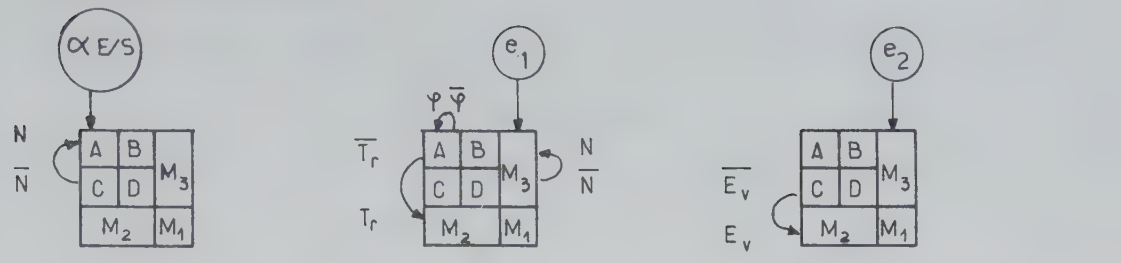
4 - TABLEAU DES CHANGEMENTS DANS $\mathcal{B}_r$ DES ENSEMBLES T_r, $\overline{T}_r$, E_v, $\overline{E}_v$, N et $\overline{N}$

VARIABLE SORTANTE $\mathcal{B}^r$



...

VARIABLE CANDIDATE



$\mathcal{B}_{rf}$

$\mathcal{B}_r$ = matrice initiale

$\mathcal{B}_r^I$ = matrice intermédiaire

$\mathcal{B}_{rf}$ = matrice finale : $\mathcal{B}_r(I')$

5 - MISE A JOUR DES FORETS ET DE LA NUMEROTATION

Les forêts et la numérotation sont perturbées uniquement par l'entrée ou la sortie d'une boucle ou d'un arc non saturé. Il est bien évident que si l'élément entrant est identique à l'élément sortant, aucune perturbation n'intervient ni dans les forêts, ni dans la numérotation.

La mise à jour des forêts et de la numérotation doit faire face à une dimension des blocs représentant chaque forêt, qui varie au cours de l'algorithme. Cette dimension est égale à $|N(i)|$ qui est lui borné supérieurement par $|\mathcal{N}|$. Néanmoins, on peut réaliser chaque renumérotation en un nombre d'opérations linéairement dépendant de $|\mathcal{N}|$ ($2.|\mathcal{N}|$ pour chaque élément entrant ou sortant d'une forêt).

Nous avons choisi de traiter le problème en deux parties : la première correspondant à l'élément sortant, la deuxième correspondant à l'élément entrant. Ce choix se justifie par le fait que l'on peut ainsi établir une forêt à partir de $\mathcal{N}$ et $[\alpha_{\mathcal{B}}, \varphi]$, à condition qu'il n'existe pas de cycles.

5.1 - Elément sortant d'une forêt

Nous avons vu les deux types d'éléments qui peuvent être candidats, à savoir :

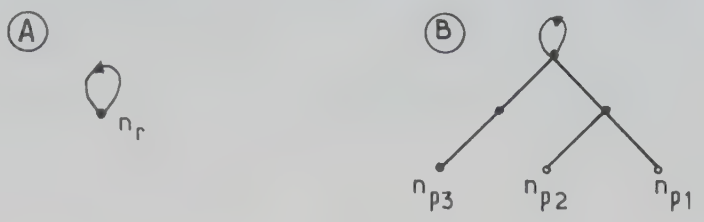
- une boucle,
- un arc.

Nous analyserons ces deux cas séparément.

...

5.1.1 - Boucle sortante

Si l'indice correspondant à une boucle "α_r" sort de la base et que cette boucle fait partie de la forêt (voir 5), elle est racine d'une composante connexe.

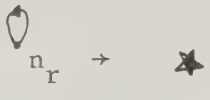


La figure ci-dessus illustre deux composantes connexes dont la racine est une boucle. Par ailleurs, elle montre les deux cas qui peuvent se produire :

- La composante connexe de la boucle sortante a un seul élément et par conséquent un seul noeud, appelons le n_r.
- La composante connexe de la boucle sortante a plus d'un élément. Il existe alors au moins une feuille (arc dont l'une des extrémités est un sommet pendant).

Dans le premier cas, une nouvelle forêt est facilement constituée. Il suffit d'éliminer la boucle α_r (la colonne associée à α_r) et le noeud n_r (la contrainte associée à n_r) de l'ancienne forêt.

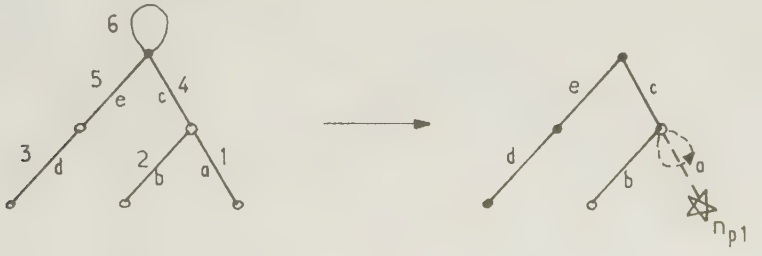
La forêt F_i' aura une composante connexe et une boucle de moins que la forêt F_i.

$N' = N - \{n_r\}$ 

Dans le deuxième cas, afin de garder le nombre minimal de composantes connexes dans la forêt, nous devons choisir le noeud à éliminer parmi les noeuds pendants de la composante connexe associée à α_r.

La feuille f_{P1} correspondante devient alors une boucle fictive et sera la nouvelle racine de la c.c.. Soit n_{P1} notre choix.

On a : $\alpha_r = f$



$N' = N - \{n_{P1}\}$

Nous remarquerons que la relation d'ordre existant précédemment est modifiée dans le nouvel arbre. Ecrivons les relations d'ordre des deux arbres (B) et (B')

Dans (B)

d < e
a < c
b < c

a < f
b < f
d < f
c < f
e < f

Dans (B')

d < e
d < c
e < c

b < a
d < a
c < a
c < a

Nous constatons que les relations d'ordre entre la racine et les branches sont immédiates.

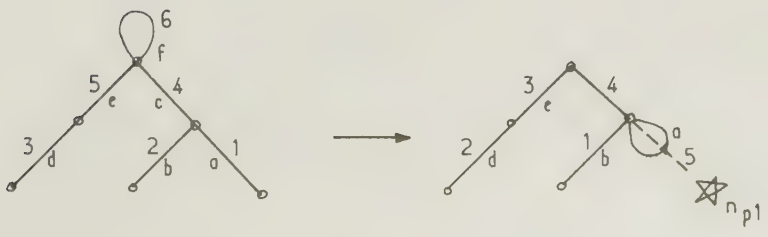
D'autre part, on constate que les éléments du chemin entre α_r et f_{Pl} sont les éléments clés à la constitution d'une nouvelle relation d'ordre.

Il est à noter que la relation 3 < 5 est conservée, ces éléments n'appartenant pas au chemin $[\alpha_r, f_{Pl}]$.

Nous n'irons pas plus loin dans cette réflexion, ses résultats n'étant pas utiles à l'établissement d'une nouvelle numérotation.

Disons qu'une nouvelle numérotation peut être obtenue à partir de la précédente en éliminant les éléments du chemin $[\alpha_r, f_{Pr}]$ bornes incluses, puis en numérotant f_{Pl} et les éléments du chemin $]\alpha_r, f_{Pl}[$, selon les règles suivantes :

- f_{Pl} sera le dernier élément numéroté
- Le chemin $]\alpha_r, f_{Pl}[$ sera numéroté après toutes les autres branches dans le sens α_r vers f_{Pl}.

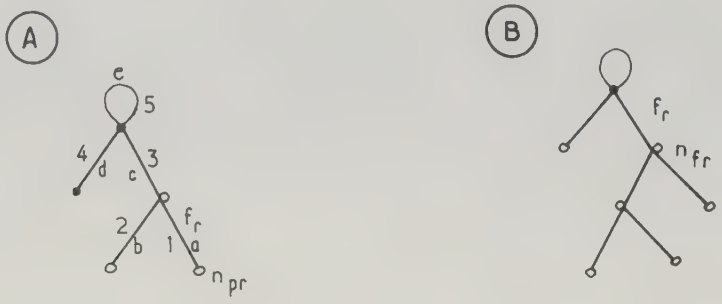


On rappellera que la règle de numérotation consiste à ce que tout élément ait un numéro associé, plus grand que tout numéro associé à un élément en aval.
Dans le cas où la boucle sortante est une boucle fictive (arc ayant une extrémité dans N et l'autre dans $\overline{N}$) le traitement est identique.

5.1.2 - Branche sortante

Deux cas que nous illustrons dans la figure ci-dessous peuvent se présenter quand une branche sort de la forêt.

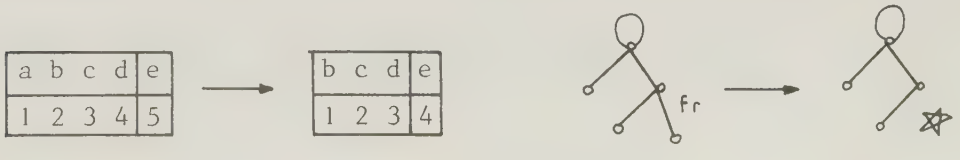
Le premier correspond à une feuille f_r qui sort de la forêt, le deuxième correspond à un arc sortant ayant au moins un élément en aval.



Dans le premier cas, figure (A) , l'élimination de l'élément f_r et du noeud n_{Pr} de l'ancien arbre suffisent à former un nouvel arbre.

La renumérotation est également simple à réaliser.

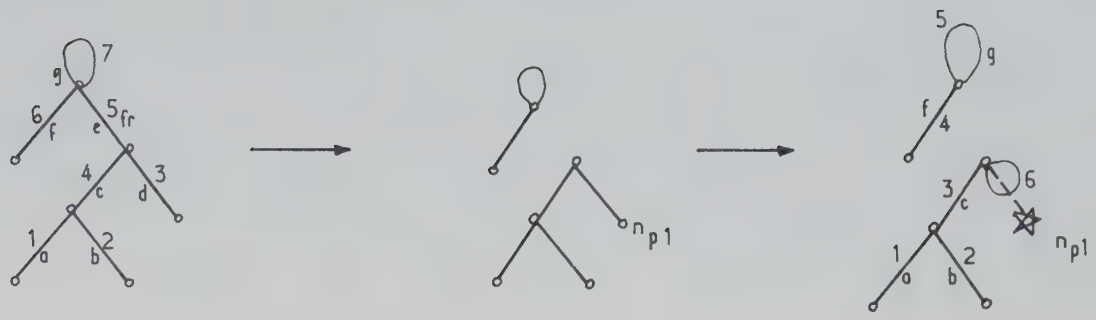
Il suffit d'éliminer f_r et de soustraire 1 aux numéros des éléments à droite.



$$N' = N - \{n_{Pr}\}$$

Dans le deuxième cas, la composante connexe se transforme en deux nouvelles composantes connexes, une constituée par les éléments en aval de f_r, la deuxième étant le complément du premier à l'arbre initial moins l'élément f_r.

...



Comme dans le point 5.1.1 le choix du noeud à éliminer se fait parmi les noeuds pendants en aval de f_r. Dans ce cas, c'est le chemin $[n_{fr}, n_{Pl}]$ qui nous aide à définir une nouvelle numérotation en suivant les règles énoncées en 5.1.1. Ainsi la numérotation devient :

	H						β
	a	b	d	c	e	f	g
	1	2	3	4	5	6	7

⟶

	H					β	
	a	b	c	f	g	d	
	1	2	3	4	5	6	

La forêt F devient F', où F et F' sont définis par :

$$N \longrightarrow N' = N - \{n_{Pl}\}$$

et

$$V_F \longrightarrow V_{F'} = V_F - \{f_r\}$$

où N est l'ensemble des noeuds de F
N' est l'ensemble des noeuds de F'
V_F est l'ensemble des éléments de F
$V_{F'}$ est l'ensemble des éléments de F'
f_r est la branche sortante
n_{Pl} est le noeud passant de N en $\overline{N}'$

Nous avons ainsi analysé, en traitant des exemples, tous les cas qui peuvent se présenter lorsque l'élément sortant de la forêt est une boucle ou une branche n'étant pas identique à l'élément entrant. Nous allons maintenant nous pencher sur les modifications apportées par l'élément entrant dans une forêt.

...

5.2 - Elément entrant dans une forêt

Nous ne pouvons plus distinguer comme au point 5.1 les éléments par leur fonction dans l'arbre (boucle ou racine, branche, feuille). Nous devons nous contenter de distinguer les éléments par leur nature, boucle vraie ou arc et par la propriété de leurs extrémités, appartenant à $\overline{N}$ ou N. Dans le cas d'appartenance à N,on distinguera si la composante connexe a une boucle fictive ou une boucle vraie comme racine.

5.2.1 - Boucle entrante

Deux cas peuvent se produire lorsque la boucle entrante α_s a son noeud de rattachement n_b appartenant à l'ensemble $\overline{N}$. Lorsque n_b appartient à N,un seul cas est possible.

5.2.1.1 - Le noeud de rattachement appartient à $\overline{N}$

Le premier cas correspond à un noeud $n_b \in \overline{N}$ tel que : n_b n'appartient pas à l'ensemble des noeuds amont des boucles fictives de la forêt.
La modification de la forêt est presque immédiate, il suffit d'introduire le noeud n_b dans N et d'ajouter la boucle α_s à la fin de la numérotation.

Ex :

$N' = N + \{n_b\}$

a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	4	5	6	7	8

→

α_s

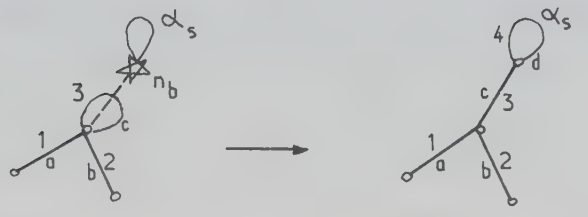
a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Le deuxième cas correspond à une boucle dont le noeud de rattachement n_b correspond au noeud amont d'une boucle fictive b_{fi} de la forêt.

...

Dans ce cas la c.c. ayant b_{fi} comme racine prendra α_s comme nouvelle racine, b_{fi} devenant une branche. L'ensemble N' sera alors :

$$N' = N + \{n_b\}$$



a	b	c
1	2	3

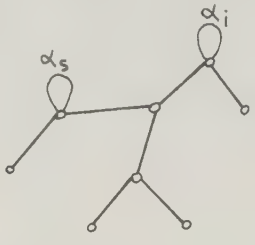
a	b	c	d
1	2	3	4

On numérote b_{fi} comme la dernière branche de la forêt et α_s parmi les boucles.

5.2.1.2 - Le noeud de rattachement appartient à N

Dans ce cas on peut démontrer que la c.c. contenant n_b a une racine du type boucle fictive.

Pour démontrer ceci on peut utiliser les propriétés des programmes linéaires. Supposons que l'élément entrant est une boucle α_s rattachée à une c.c. ayant une boucle vraie α_i comme racine.



En vertu de la forme matricielle de la base, on peut démontrer que, lorsque la valeur de α_s augmente, seules les composantes de α_i, α_s et du chemin $]\alpha_s, \alpha_i[$ se trouvent modifiées avec un coefficient de $\pm$ 1 (voir annexe III.1). La variable sortante appartient donc à l'ensemble de ces éléments. Si l'indice de α_s ne sort pas de la base par l'une de ces bornes, de deux choses l'une : soit α_i sort de la base, soit l'une des branches du chemin $]\alpha_s, \alpha_i[$ sort de la forêt.

...

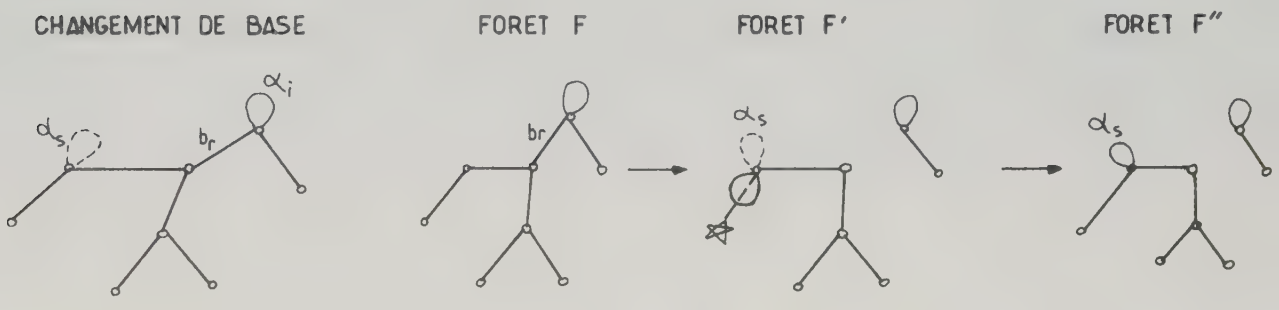
Dans le premier cas, une fois la modification de la forêt concernant la variable sortante étant faite, la c.c. aura une boucle fictive comme racine.

Dans le deuxième cas, la c.c. se divise en deux, l'une ayant α_i comme racine, l'autre ayant une boucle fictive comme racine. α_s est rattachée à la deuxième c.c..

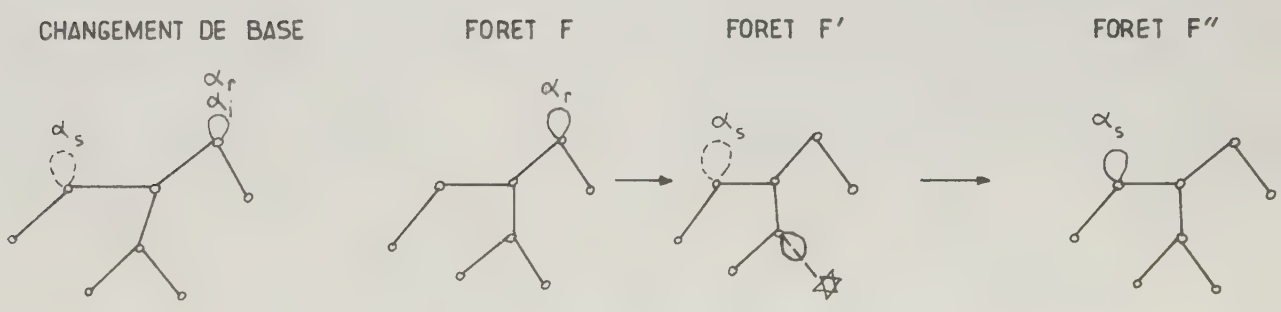
Dans les deux cas, une fois la forêt modifiée par la variable sortante, si l'indice de α_s ne sort pas de la base, β_s est rattachée à une c.c. dont la racine est une boucle fictive.

Les figures ci-dessous montrent les changements de base possibles avec les modifications successives de la forêt F en F' puis en F''.

Ex 1 :



Ex 2 :



Nous avons démontré que, si $n_b \in N$, la racine en amont de n_b est une boucle fictive b_{fi}.
La nouvelle forêt sera constituée en ajoutant le noeud n_i amont de b_{fi} à N, en transformant b_{fi} en branche et en ajoutant α_r à l'ensemble des boucles résultant.

...

La nouvelle numérotation s'obtient en éliminant les éléments du chemin $]b_{fi}, \alpha_s[$ et b_{fi}, en numérotant la branche b_{fi} et les branches du chemin $[b_{fi}, \alpha_s]$ dans cet ordre après toutes les autres branches puis α_s parmi les boucles.

Ex :

a	b	c	d	e
1	2	3	4	5

a	b	c	d	e	f
1	2	3	4	5	6

Nous avons analysé tous les cas que peut engendrer l'entrée d'une boucle dans une forêt. Nous passons maintenant à la situation ayant le plus de cas : l'entrée d'un arc dans une forêt.

5.2.2 - Arc entrant

Considérons l'arc b_s entrant dans la forêt et notons n_{s1} et n_{s2} ses extrémités. Nous distinguerons tous les cas qui peuvent se produire suivant que les extrémités appartiennent à N ou $\overline{N}$ et suivant la nature des racines des c.c. associées à n_{s1} et n_{s2}.

D'abord nous définirons les conditions dans lesquelles on peut associer une c.c. à un noeud. On associera à un noeud n_i une c.c. si n_i appartient à une c.c. ou s'il correspond au noeud amont de la boucle fictive d'une c.c..

5.2.2.1 - Arc b_s entrant, sans composante connexe associée

Le cas le plus simple que l'on peut rencontrer c'est celui où l'on ne peut associer aucune c.c. aux extrémités de b_s.
La nouvelle forêt s'obtient en ajoutant une c.c. constituée par une boucle fictive formée par l'arc entrant et en ajoutant l'une de ses extrémités à N.

$N' = N + n_{s2}$

...

La nouvelle numérotation s'obtient en numérotant l'arc b_s parmi les boucles.

5.2.2.2 - Arc b_s entrant, avec une seule composante connexe associée

Un arc qui entre dans une forêt de la base et auquel on ne peut associer qu'une seule c. c.a un certain nombre de propriétés que nous énoncerons ci-dessous. Rappelons d'abord que, pour savoir s'il existe des c. c. associées à un arc, il faut analyser les noeuds extrémités de l'arc. Ainsi, si un noeud appartient à une c. c. ou coïncide avec le noeud amont de la boucle fictive (racine de la c.c.),on dira que cette c. c. est associée à l'arc.

On peut imaginer que deux cas peuvent se produire dans la situation où un arc a une seule c. c. associée.

Le premier cas consiste en ce qu'un noeud extrémité admette une c.c. comme associée et que l'autre noeud n'admette aucune association avec les composantes connexes de la forêt.

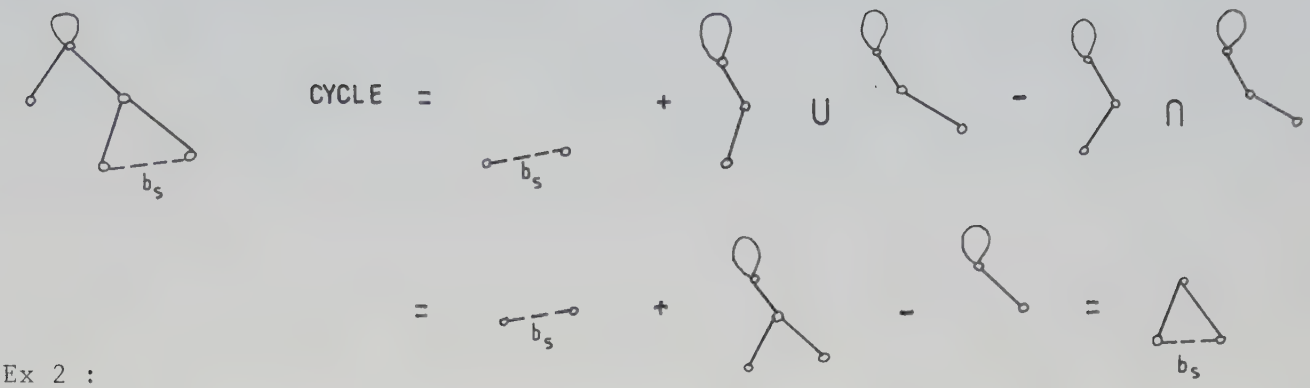
Un deuxième cas, que nous démontrerons être impossible, consisterait en ce que les deux extrémités de l'arc entrant soient associées à la même c.c..

Dans ce cas, un cycle formé par l'arc entrant et par un sous-ensemble d'éléments de la c.c. peut être formé. Ces éléments sont faciles à définir en remontant la c. c. à partir des extrémités de l'arc entrant.

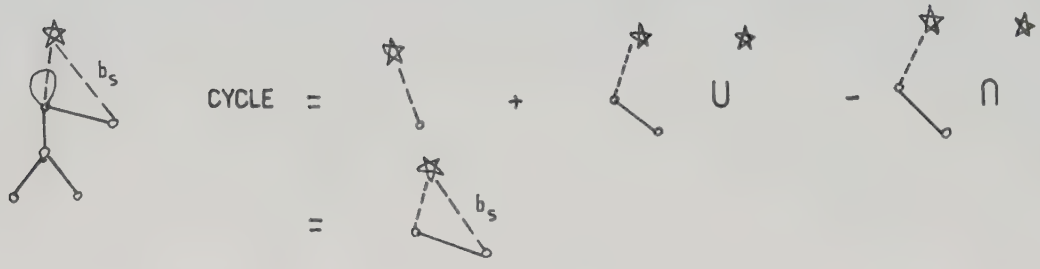
Remarque : Nous considérons les boucles comme des arcs ayant comme extrémités leur sommet de rattachement et un sommet fictif, commun à toutes les boucles.

Regardons 2 exemples.

Ex 1 :



Ex 2 :



L'existence dans A d'un cycle prouve la dépendance linéaire du système formé par les colonnes de A correspondant aux arcs du cycle. Or A est régulière (voir annexe II.2).

Ceci suffit à prouver qu'un tel cas est impossible. Rappelons toutefois que la forêt considérée est la forêt obtenue après avoir considéré les modifications dues à la variable sortante dans un changement de base.

Nous venons de voir que dans le cas où une seule c. c. peut être associée à un arc entrant, l'une des extrémités de cet arc n'accepte aucune c.c. comme associée. Une conséquence immédiate est que ce sommet n'appartient pas à la forêt. Nous distinguerons deux cas en ce qui concerne le noeud associé à la c. c..
Un premier cas est caractérisé par l'appartenance des deux noeuds extrémité de b_s à l'ensemble $\bar{N}$. Un deuxième cas est défini par l'appartenance d'une extrémité de b_s à $\bar{N}$ et l'autre à N.

5.2.2.2.1 - Arc b_s ayant ses deux extrémités dans $\overline{N}$

Ce cas représenté par un arc b_s ayant une extrémité n_i associée à une c. c. mais faisant partie de $\overline{N}$ ne peut être obtenu que si le noeud n_i coïncide avec le noeud amont de la racine de la c. c. associée. Ceci impose évidemment que la racine soit une boucle fictive. Une nouvelle forêt peut être obtenue en faisant entrer le noeud n_i et en considérant b_s comme nouvelle racine de la c. c. associée à b_s.

Une nouvelle numérotation est obtenue en numérotant b_s parmi les boucles et l'ancienne boucle comme la dernière branche.

Ex :

a	b	c
1	2	3

a	b	c	b_s
1	2	3	4

$$N' = N + \{n_i\}$$

5.2.2.2.2 - Arc b_s ayant une seule extrémité n_i dans $\overline{N}$

Dans le cas où un noeud n_i appartient à $\overline{N}$ et l'autre, n_j, à N le changement de forêt est assez simple.

Une nouvelle forêt est obtenue en ajoutant n_i et b_s à la forêt. Comme n_i n'admet aucune c. c. comme associée, ceci prouve que n_i est un sommet pendant et b_s une feuille dans la nouvelle c.c.. La mise à jour est faite en numérotant b_s comme la première branche de l'arbre. Ces résultats sont indépendants de la nature de la racine de la c. c..

...

Ex :

a	b	c	d
1	2	3	4

b_s	a	b	c	d
1	2	3	4	5

L'arc b_s est une feuille dans le nouvel arbre.

5.2.2.3 - Arc b_s avec deux composantes connexes associées

Dans le cas où un arc b_s entre dans la forêt et que,à chacune de ses extrémités,on peut associer une c. c., les différentes situations se distinguent d'abord par la nature des racines associées. Les composantes connexes peuvent avoir comme racine une boucle vraie ou une boucle fictive. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe III.3 pour voir la démonstration prouvant que les deux racines ne peuvent être des boucles vraies à la fois.

Les cas qui sont possibles sont donc les suivants :

- Les deux racines sont des boucles fictives.
- Une racine est une boucle vraie, l'autre est une boucle fictive.

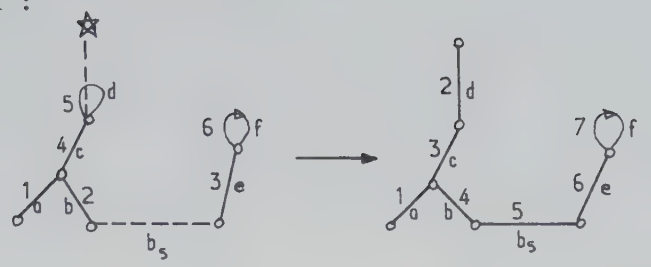
5.2.2.3.1 - Les racines des composantes connexes associées à b_s sont une boucle vraie et une boucle fictive

Dans le cas où deux c. c. sont associées à b_s, celui-ci les relie en formant une seule c. c. . Pour construire cette nouvelle forêt il faut ajouter un noeud. Si les racines sont du type boucle vraie et boucle fictive, le choix est imposé et est défini par le noeud amont de la boucle fictive.

On notera que ce noeud peut coïncider dans certains cas particuliers avec une extrémité de b_s.

On numérote les arcs du chemin[boucle fictive, arc b_s], puis le chemin]b_s, boucle vraie[après toutes les autres branches.

Ex :



a	b	e	c	d	f
1	2	3	4	5	6

a	d	c	b	b_s	e	f
1	2	3	4	5	6	7

5.2.2.3.2 - Les deux racines des composantes connexes associées à b_s sont des boucles fictives

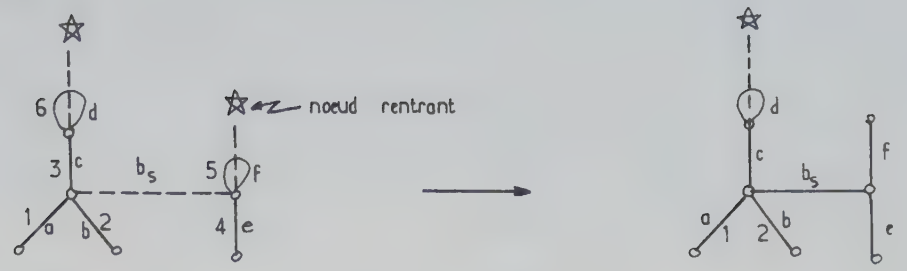
Comme dans le cas précédent, nous devons former une seule c.c. constituée par b_s et ses c. c. associées. Pour réaliser cet objectif il faudra augmenter d'un le nombre de noeuds. En général, on choisira le noeud amont de l'une des racines.
Ce choix peut être imposé, si une et une seule des extrémités de b_s coïncide avec l'un de ces deux noeuds amont, ou arbitraire si b_s a ses deux extrémités dans N. Toutefois, il existe un cas particulier, que nous traiterons à part, qui consiste à avoir la coïncidence des 2 extrémités de b_s avec les noeuds amont des boucles fictives.

5.2.2.3.2.1 - L'arc b_s a au moins une extrémité dans N

Nous avons vu que si une extrémité de b_s appartient à N et l'autre à $\overline{N}$, l'addition de ce dernier noeud permet d'établir une nouvelle forêt. Si b_s a ses deux extrémités dans $\overline{N}$, on peut faire entrer l'un des noeuds amont des boucles fictives associées à b_s indistinctement. Une fois le noeud à introduire défini, la nouvelle numérotation s'établit en numérotant les arcs du chemin [boucle en amont du noeud entrant, arc b_s] puis ceux du chemin [arc b_s, boucle en amont du noeud $\in N$] dans cet ordre et après toutes les autres branches.

...

Ex :



a	b	c	e	d	f
1	2	3	4	5	6

a	b	e	f	b_s	c	d
1	2	3	4	5	6	7

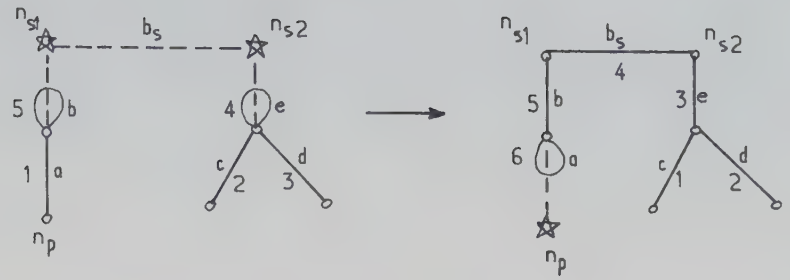
5.2.2.3.2.2 - L'arc b_s a ses deux extrémités dans $\bar{N}$ et a deux composantes connexes associées

Lorsque les extrémités n_{1s} et n_{2s} de l'arc b_s coïncident avec les noeuds amont de deux boucles fictives b_{f1} et b_{f2} de la forêt, l'entrée de b_s et de l'une de ses extrémités suffirait à constituer un système régulier formé par les lignes et les colonnes correspondant aux sommets et aux éléments de la forêt F'. Néanmoins, la forêt ainsi formée ne satisferait pas à la condition de minimiser le nombre de c. c. de la forêt F', puisque l'arc b_s et ses deux c. c. associées peuvent constituer une seule c. c. dans la nouvelle forêt F'. Il suffit d'introduire dans la forêt l'arc b_s et les deux extrémités n_{s1}, n_{s2} de b_s et d'éliminer un noeud pendant n_p de la c. c. ainsi formée (ce noeud était pendant également dans la forêt F). Nous noterons b_{f1} la racine en amont de n_p .

La nouvelle numérotation est établie en numérotant parmi les arcs et en dernier, les éléments b_{f2}, b_S, b_{f1} et les éléments du chemin $]b_{f1}, n_p[$ bornes exclues, et l'arc ayant n_p comme extrémité parmi les boucles. Evidemment b_{f1} et b_{f2} ne seront plus numérotés parmi les boucles, ni l'arc ayant n_p comme extrémité parmi les branches.

...

Ex :



$$N' = N + \{n_{s1}, n_{s2}\} - n_p$$

a	c	d	e	b
1	2	3	4	5

c	d	e	b_s	b	a
1	2	3	4	5	6

C'est dans ce cas uniquement que l'ensemble N' est obtenu à partir de N en ajoutant plus d'un élément et qu'il y a un noeud à éliminer parmi N, lors de l'entrée d'un élément dans la forêt.

Disons juste un mot sur l'actualisation de la matrice D' dans ce cas.

La matrice D' dont les lignes correspondent aux variables x_i et les colonnes à l'ensemble $\overline{N} \cup \overline{E_v}$ est modifiée à la fois par la variable sortante et par la variable entrante. La variable sortante fait augmenter d'un élément l'ensemble $\overline{N} \cup \overline{E_v}$.

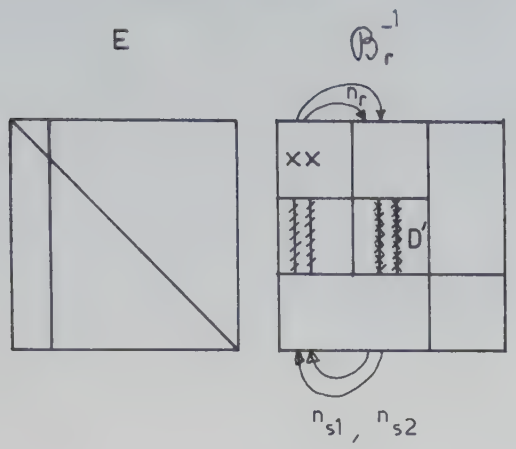
Si la variable sortante est du type α_r ou e_{1r}, on ajoute à $\overline{N}$ un nouvel élément n_r. Si la variable sortante est du type e_{2r}, c'est l'ensemble $\overline{E}_v$ qui est modifié.

D'autre part, l'entrée de la variable e_{1i} associée à b_s fait perdre deux éléments à $\overline{N}$ et lui en fait gagner un autre, n_p.

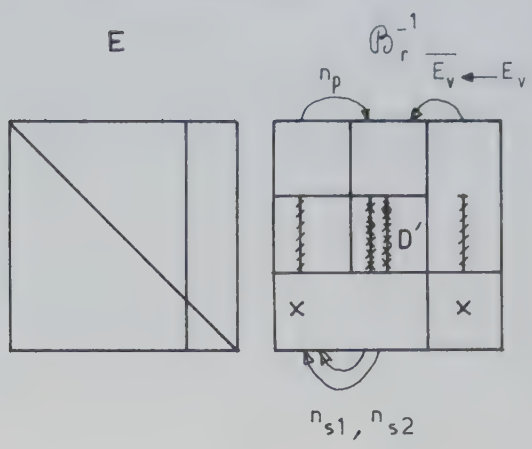
Si n_r est différent aux noeuds perdus par $\overline{N}$ ou si la variable sortante est du type e_{2i}, l'ensemble des indices des colonnes de D'(I') aura deux nouveaux éléments. Ils correspondent à la variable sortante et à n_p.

...

VARIABLE SORTANTE α_r OU e_{1r}



VARIABLE SORTANTE e_{2r}



6 - CONCLUSION DU TROISIEME CHAPITRE

Nous avons vu dans ce chapitre les particularités des changements de base compte tenu des règles de partitionnement établies au chapitre II. Le nombre de cas qui peuvent se présenter au cours d'un traitement est trop important pour que chacun d'eux soit étudié séparément, Ceci est vrai plus particulièrement en ce qui concerne les modifications des arborescences. Nous avons donc décomposé notre analyse en traitant les modifications introduites par la variable sortante en premier lieu, puis en considérant l'influence de la variable entrante. Le nombre de cas à étudier reste tout de même important en ce qui concerne les perturbations des forêts dues à la variable entrante.

Compte tenu des résultats de cette analyse, nous sommes en mesure d'écrire un programme Fortran en vue d'un traitement informatique du problème sur ordinateur.

...

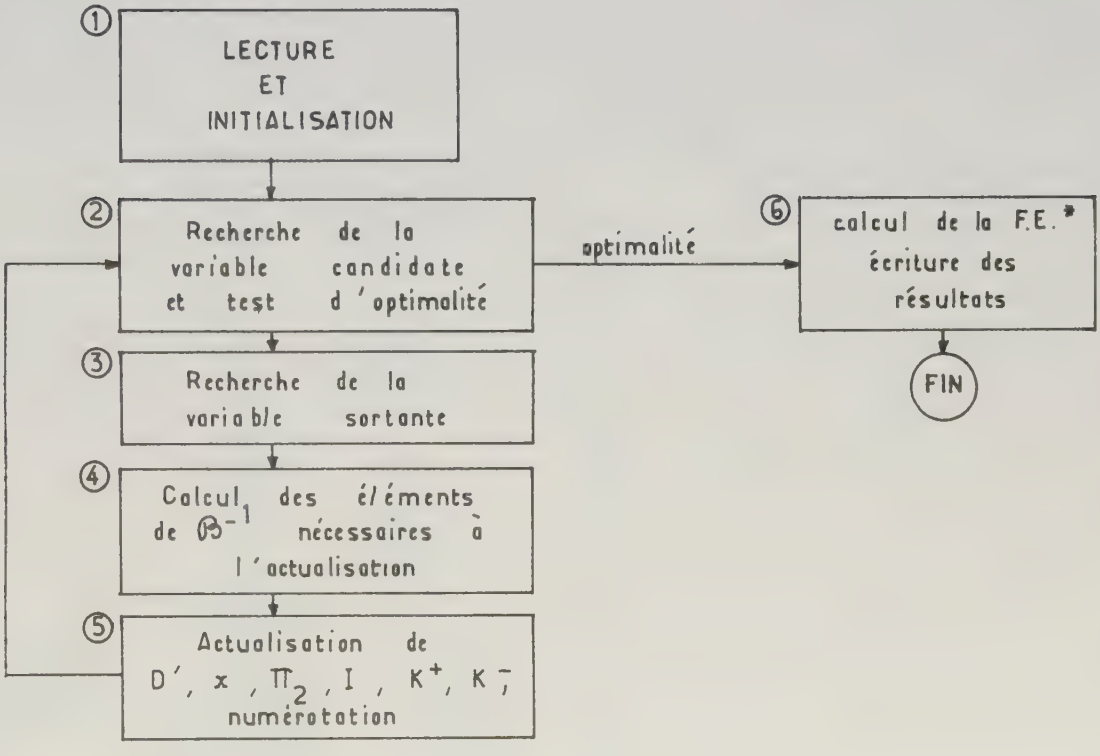
CHAPITRE IV

PROGRAMME FORTRAN ET RESULTATS

L'algorithme décrit aux chapitres II et III a été programmé et testé sur quelques exemples.

1 - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

L'algorithme informatique a un programme principal dont l'organigramme est le suivant :

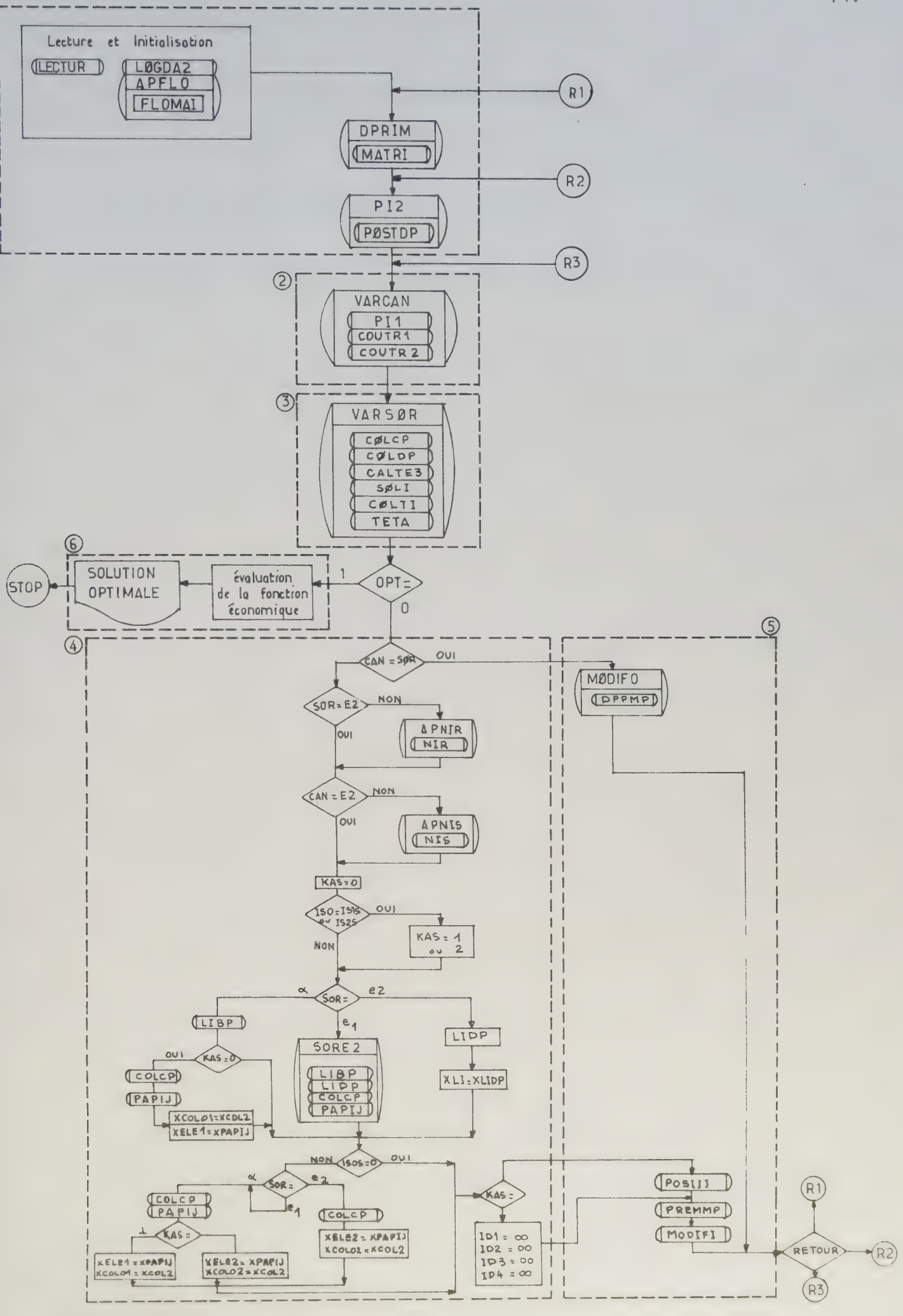


L'organigramme de la figure 1 décrit plus en détail les points ① à ⑥ en indiquant quels sont les sous-programmes qui les constituent.

...

* (F.E. = Fonction Economique)

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPAL



On se réfèrera à l'Annexe IV.1 pour y trouver une description plus détaillée de ces sous-programmes.

2 - ORGANISATION DES TABLEAUX ET DES DONNEES

Les informations définissant le problème sont :

a) - La matrice d'incidence T.

b) - Le nombre de périodes, de paliers, de situations d'indisponibilités, de noeuds, d'arcs, de boucles de production, de boucles de consommation.

c) - La valeur de $\underline{x}$ et $\bar{x}$, μ, λ, c(t), d, $\bar{p}$.

d) - Le résultat des tirages au sort sur les groupes de production.

Ces informations sont gardées en mémoire respectivement sous la forme :

a) - Deux tableaux MG1 et MG2, donnant l'extrémité initiale et terminale des arcs et des boucles. Ces tableaux sont en INTEGER*2, c'est-à-dire qu'ils sont constitués de mots de 2 octets (1 octet = 8 bits). On a MG1(i) = 0 pour i indice de toute boucle positive et MG2(i) = 0 pour j indice de toute boucle négative.

b) - Des variables en INTEGER*2 (INP, INS, INN, INA, INAE, INAS).

c) - Des vecteurs en double précision xO, xb, xcp, xcp (INAE+1) xce ,dem , prod.

d) - Un vecteur en LOGICAL*1 (LØG5) avec 1 octet par composante.

La base est définie par :

a) I, K^+, K^-, T_r, $\overline{T_r}$

b) N, $\bar{N}$.

c) E_v, $\overline{E_v}$

d) x, Π_2.

e) D'.

f) La numérotation et l'orientation des arcs de l'arborescence.

...

Ces informations sont gardées en mémoire sous la forme suivante :

a) - Un vecteur logique LØGI donnant pour Ψ_i l'appartenance à Ψ ou $\overline{\Psi}$ pour α l'appartenance à $\mathcal{B}_r$ ou $\overline{\mathcal{B}}_r$, plus un vecteur logique LØG2 donnant la contrainte saturée (supérieure ou inférieure) pour $\overline{\Psi}$ et l'appartenance à K^+ ou K^- pour $\alpha_{\overline{\mathcal{B}}_r}$.

b) - Un vecteur logique LØG3 donnant l'appartenance à N ou $\overline{N}$ pour tout élément de $\mathcal{N}$ pour chaque période, palier et situation d'indisponibilité.

c) - Un vecteur logique LØG4 donnant l'appartenance à E_v ou $\overline{E_v}$.

d) - Deux vecteurs en double précision x et xpi2.

e) - Trois vecteurs xd, xdl, IDC donnant respectivement :
- La valeur de l'élément i non nul xd(i)
- La ligne dans D' de l'élément i IDL(i)
- L'indice du dernier élément non nul de la colonne j IDC (j+1) avec IDC(1) = 0.

f) - Trois vecteurs MUM, M, NC en INTEGER*2, donnant :
- L'indice j de l'élément du graphe portant le numéro i. MUM(i)=j, le signe donnant l'orientation dans l'arborescence par rapport à l'orientation de l'élément.
- Le nombre d'éléments de la forêt i. M(i)
- Le nombre de branches de la forêt i. NC(i).

3 - FONCTIONS SPECIALES DE L'ALGORITHME

Un certain nombre de variables permettent de faire des tests, écrire des résultats intermédiaires, recalculer la matrice D', recalculer le vecteur Π_2, au cours d'une itération, d'arrêter le processus itératif, enfin de résoudre un problème ayant k situation d'indisponibilité en vue d'utiliser cet optimum, combiné aux solutions optimales des problèmes de gestion associés, comme solution de départ d'un problème ayant plus de k situations.

Cette dernière procédure est intéressante sur le plan des temps de calcul car elle réduit le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'optimum.

...

4 - RESULTATS

Nous avons traité le problème concernant le réseau EdF pendant la période allant de l'année 1985 à l'année 2000. Le système est représenté par :

- 92 arcs
- 298 groupes
- 49 régions avec leur demande
- 1 palier correspondant à la pointe
- 1 période.

Nous avons fait varier le nombre de situations d'indisponibilité.

Nous avons également mesurer l'incidence de la prise en compte des coûts de production des groupes dans la fonction économique. Pour cela, nous avons fait des passages en considérant tous les coûts de production nuls.

Le tableau ci-dessous montre les résultats obtenus après ces différents passages :

Nombre de situations considérées	Nombre d'itérations	Temps moyen de calcul de chaque itération du problème complet en millisecondes
20	230/3Sit ⋆ + 1319	364
35	230/3Sit ⋆ + 3184	519
50	75/2Sit + 248/6Sit ⋆ +546/15Sit+573/30Sit +1400/38Sit+125/45Sit +1258	606

...

⋆ Nous procédons à la résolution de problèmes comptant un nombre réduit de situations, afin de donner une bonne solution de départ au problème de taille supérieure.

TABLEAU DES RENFORCEMENTS DES LIAISONS EN MW

Liaison	Problèmes avec des coûts de production ≠ 0			Problème avec des coûts de production = 0
	20 Sit.	35 Sit.	50 Sit.	50 Sit.
3	568	568	568	192,2
8	437	587,5	474,5	574,5
14			61,6	
21	26	26	26	26
24			28,3	
38			311,8	373,4
57	14			
59		89	89	89
68	24,5	24,5	37,5	37,5
69	262,5	262,5	275,5	275,5
72			56	56
73	155,1			
76	1 309	1 309	1 309	1 309
80	320			
83	175	175	175	175
86	632	792	792	494
88	932	1 252	1 252	1 252
89	913	1 325	1 286,5	1 659
90		334	344,7	
Somme des renforcements (MW)	5 772,1	6 744,5	7 087,4	6 513,1
% Augmentation par rapport au réseau initial	6,5 %	7,6 %	8,0 %	7,3 %
Temps de calcul	8,5 min	28 min	30 min	7 min
Fonction économique $KF \times 10^3$	258,9	251,9	249,7	155,9 (299,5)*

...

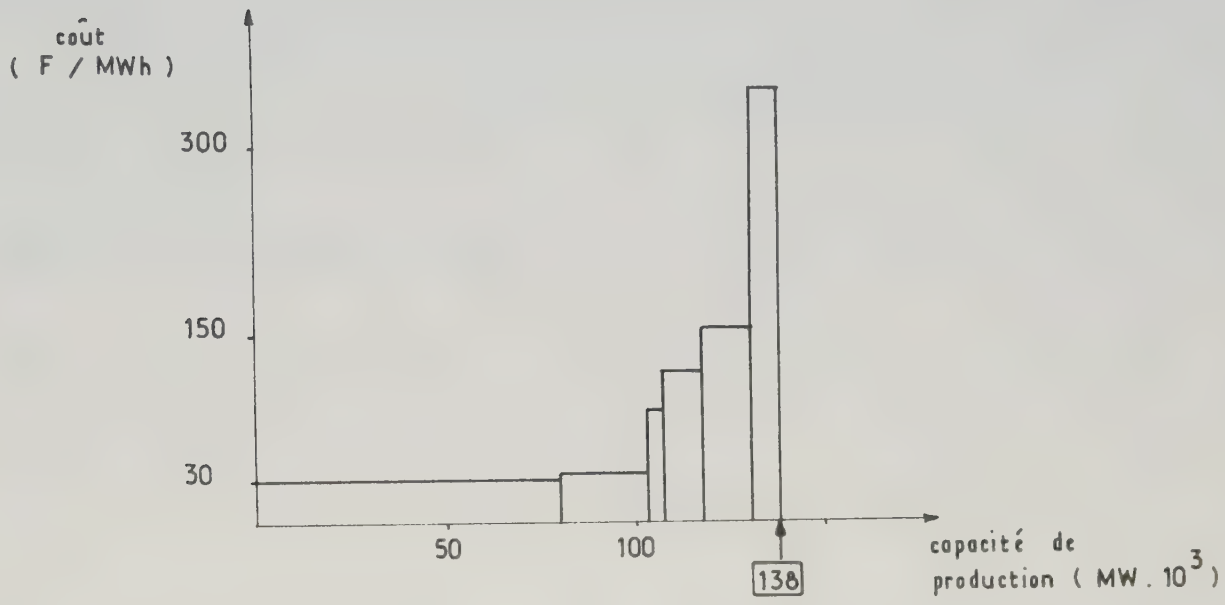
* Cette valeur représente la valeur de la fonction économique en remplaçant les coûts unitaires de production supposés nuls par leur vraie valeur.

Données

Capacité du réseau initial = $\sum_i \underline{x}_i$ = 88 652 MW

Demande globale = 88 878 MW

Nous pouvons représenter le parc de production par son coût unitaire de production en fonction de sa capacité maximale, en ordonnant les coûts par ordre croissant.



...

Fonction économique

	Coûts de production ≠ 0			Coûts de production = 0
	20 Sit.	35 Sit.	50 Sit.	50 Sit.
Coût du réseau existant	143,58	143,58	143,58	143,58
Coût des renforcements	6,46	7,23	7,73	6,98
Coût de la défaillance	13,31	7,65	5,33	5,38
Coût de production	95,63	93,49	93,05	- (143,56) *
Valeur de la fonction économique	258,9	251,9	249,6	155,9 (299,5)*

Valeurs données en K. Francs. 10^3

5 - CONCLUSION DU QUATRIEME CHAPITRE

Quelques conclusions peuvent être tirées de ces passages. D'une part, nous constatons l'influence considérable de la solution de départ sur le nombre d'itérations et le temps de calcul. D'autre part, les passages réalisés ont montré que le nombre de situations traitées influe considérablement sur le réseau optimal et tout particulièrement lorsque ce nombre est petit.

Enfin, nous noterons que les renforcements sont réalisés pour deux raisons :

1°) - Minimiser la défaillance.

2°) - Evacuer la puissance des groupes les moins chers. Ce dernier type de renforcement constitue environ 10 % de l'augmentation totale de la capacité du réseau.

Ces résultats correspondent à une évaluation du système à la pointe. C'est pendant ces heures que le réseau ainsi que les groupes de production de coût élevé sont le plus sollicités.

...

* Cette valeur représente la valeur de la fonction économique en remplaçant les coûts unitaires de production supposés nuls par leur vraie valeur.

CONCLUSION

Face au problème de la planification à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique, nous avons tout d'abord réalisé une modélisation aboutissant à la formulation d'un programme linéaire de grande taille. Compte tenu de la structure de la matrice des contraintes, nous avons développé un algorithme mathématique de résolution qui permet de réduire l'encombrement mémoire et le temps de calcul par rapport à une méthode de programmation linéaire classique.

Cette étude se concrétise sous la forme d'un programme FORTRAN permettant de traiter des exemples sur ordinateur.

Quelques passages du programme nous ont permis d'appliquer ce code au problème de l'optimisation du réseau très haute tension d'EDF.

Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'incidence sur la solution optimale de la prise en compte des coûts de production dans la fonction économique, et évaluer l'importance relative des termes qui la constituent, à savoir, le coût des investissements, le coût de production et le coût de défaillance.

...

ANNEXE II.1

METHODE REVISEE DU SIMPLEXE A VARIABLES BORNEES

NOTATION : Soit M une matrice (L×I), M^K sera la matrice L×K avec K⊂ I et M_Q la matrice (Q×I) avec Q ⊂ L.

Soit un programme linéaire de la forme [6] :

$$\begin{cases} \text{Min } \{z = f\,y\} \\ \quad \text{Sous les contraintes} \\ \quad\quad My = b_o \\ \quad\quad \delta^+ \leq y \leq \delta^- \end{cases}$$

avec

données du problème :

- f vecteur des coûts indicé par (J)
- M matrice des contraintes indicée par (L×J)
- δ^- vecteur des bornes inférieures indicé par (J)
- δ^+ vecteur des bornes supérieures indicé par (J)
- b_o vecteur second membre indicé par (L)

inconnue :

- y vecteur des variables indicé par (L)
- z fonction économique à minimiser

On pose $|J| = n$, $|L| = m$, $n \geq m$

On suppose que M est de rang m,

on se donne une base I de M, c'est-à-dire, un sous-ensemble I ⊂ J tel que :

$|I| = |L| = m$

M^I ou $\mathcal{B}(I)$ est régulière (Matrice de base).

On suppose que $(M^I)^{-1}$ est connue au début d'une itération. Elle sera notée $\mathcal{B}^{-1}$.

Soit $\bar{I} = J - I$ et K^+, K^- un partitionnement de $\bar{I}$.

...

La solution de base $y(I, K^+, K^-)$ est définie par :

$$\begin{cases} y_{K^+} = \delta^+_{K^+} \\ y_{K^-} = \delta^-_{K^-} \\ y_I = (\mathcal{B})^{-1} \{b_o - M^{K^+} \delta^+_{K^+} - M^{K^-} \delta^-_{K^-}\} = \bar{b}(I) \end{cases}$$

La solution de base sera réalisable si $\delta^-_I \leq y_I \leq \delta^+_I$

On suppose K^+, K^-, I, $\bar{b}(I)$ connus.

Une itération de l'algorithme comporte les opérations suivantes :

a) Critère de candidature :

Soit les coûts relatifs :

$$\bar{f}(I) = f - f^I (\mathcal{B})^{-1} M$$

ou $\bar{f}(I) = f = \Pi(I)M$ avec $\Pi(I) = f^I (\mathcal{B})^{-1}$ qui est le vecteur des multiplicateurs et $\bar{f}(I)$ le vecteur des coûts relatifs,

on a : $\bar{f}^I(I) = 0$, $\forall I$

On choisira une variable candidate indicée par $s \in \bar{I}$

telle que : $s \in K^-$: $\bar{f}_s(I) < 0$

$s \in K^+$: $\bar{f}_s(I) > 0$ Si aucun indice parmi $\bar{I}$ ne satisfait à l'un de ces critères, l'optimum du problème est atteint.

b) Une fois s choisi deux cas sont à considérer :

En notant $\bar{M}^s$ la colonne $(\mathcal{B}^{-1})\, M^s$ et $\bar{a}^s_i = \bar{M}^s_i$ avec $i \in I$, on a :

1°) $\underline{s \in K^+}$

On calcule

$\theta_M = \min \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ avec :

$$\begin{cases} \theta_1 = \min\limits_{\bar{a}^s_i < 0} \dfrac{\delta^-_i - \bar{b}(I)_i}{\bar{a}^s_i} & i \in I \\ \theta_2 = \min\limits_{\bar{a}^s_i > 0} \dfrac{\delta^+_i - \bar{b}(I)_i}{\bar{a}^s_i} & i \in I \\ \theta_3 = \delta^+_s - \delta^-_s \end{cases}$$

...

Si $\theta_M = \theta_3$ la valeur de y_s passe de δ_s^+ à δ_s^-. Il n'y a pas de changement de base seulement modification de K^+ et K^-.

$$K^{+'} = K^+ - \{s\}$$
$$K^{-'} = K^- + \{s\}$$

Sinon, r est l'indice i assurant le minimum des rapport envisagés.
Il y a changement de base $I' = I + \{s\} - \{r\}$, et

$$\bar{I}' = \bar{I} - \{s\} + \{r\} \quad \begin{cases} \text{si } \theta_M = \theta_1 \text{ on a } K^{+'} = K^+ - \{s\} \text{ et } K^{-'} = K^- + \{r\} \\ \text{si } \theta_M = \theta_2 \text{ on a } K^{+'} = K^+ - \{s\} + \{r\} \text{ et } K^{-'} = K^- \end{cases}$$

2°) $\underline{s \in K^-}$

Règles analogues à 1°) en remplaçant $\bar{a}_i^s$ par $-\bar{a}_i^s$
On calcule :

$$\theta_M = \min \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \min\limits_{\bar{a}_i^s > 0} \dfrac{\bar{b}(I)_i - \delta_i^-}{\bar{a}_i^s} & i \in I \\ \theta_2 = \min\limits_{\bar{a}_i^s < 0} \dfrac{\bar{b}(I)_i - \delta_i^+}{\bar{a}_i^s} & i \in I \\ \theta_3 = \delta_s^+ - \delta_s^- \end{cases}$$

Si $\theta_M = \theta_3$ la valeur de y_s passe de δ_s^- à δ_s^+.

Il n'y a pas de changement de base, seulement modification de K^+ et K^-.

$$K'^+ = K^+ + \{s\}$$

$$K'^- = K^- - \{s\}$$

Sinon r est l'indice i assurant le minimum des rapports envisagés.
Il y a changement de base $I' = I + \{s\} - \{r\}$, et
$\bar{I}' = \bar{I} - \{s\} + \{r\}$ avec :

$$\begin{cases} \text{si } \theta_M = \theta_1 \text{ on a } K^{+'} = K^+ \text{ et } K^{-'} = K^- - \{s\} + \{r\} \\ \text{si } \theta_M = \theta_2 \text{ on a } K^{+'} = K^+ + \{r\} \text{ et } K^{-'} = K^- - \{s\} \end{cases}$$

...

Il nous reste à voir comment actualiser la matrice $\hat{\mathcal{B}}^{-1}$, le vecteur $\bar{b}(I)$ et le vecteur $\Pi(I)$

soit $\hat{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ f^I & 1 \end{bmatrix}$ on a : $\hat{\mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{-1} & 0 \\ -\Pi & 1 \end{bmatrix}$

c) - Mise à jour de $\bar{b}$

1°) $\bar{b}(I')_i = \bar{b}(I)_i + \theta_M \bar{a}_i^s$ pour $i \in I - \{r\}$

si $\theta_M \neq \theta_3$ $\bar{b}(I')_s = \delta_s^+ - \theta_M$, si $\theta_M = \theta_3$ $\bar{b}(I')_s = \delta_s^-$ avec $\{r\}=\emptyset$

2°)

$\bar{b}(I')_i = \bar{b}(I)_i - \theta_M \bar{a}_i^s$ pour $i \in I - \{r\}$

si $\theta_M \neq \theta_3$ $\bar{b}(I')_s = \delta_s^- + \theta_M$, si $\theta_M = \theta_3$ $\bar{b}(I')_s = \delta_s^+$ avec $\{r\}=\emptyset$

d) - Mise à jour de la matrice $\hat{\mathcal{B}}^{-1}$

Etant donné la matrice $\hat{\mathcal{B}}^{-1}(I)$, on cherche $\hat{\mathcal{B}}^{-1}(I')$ dans le cas où $\{r\} \neq \emptyset$ (autrement $I = I'$).

Soit t^s la colonne définie par :

$$t^s = \begin{bmatrix} \bar{M}^s \\ \bar{f}_s \end{bmatrix}$$

On effectue une opération de pivotage sur l'élément t_r^s afin de transformer t^s en un vecteur unité u_s.

On a :

$I' = I - \{r\} + \{s\}$

$\mathcal{B}(I)$: $L \times I$

E : $I' \times I$

$\bar{\mathcal{B}}^{-1}(I)$: $I \times L$

$\bar{\mathcal{B}}^{-1}(I')$: $I' \times L$

Avec : $E_s^{I-r} = 0$

$E_i^i = 1$ pour $i \in I - \{r\} = I' - \{s\}$

$E_i^j = 0$ pour $i \neq j$ $\quad i \in I' - \{s\}$

$\quad\quad\quad

On a :

$$\mathcal{B}^{-1}(I') = E \quad \mathcal{B}^{-1}(I)$$

Les multiplicateurs Π (I') sont donnés par la formule :

$$\Pi(I') = \Pi(I) + \frac{\bar{f}_s}{t_r} \mathcal{B}_r^{-1}(I)$$

On retourne alors au point a).

...

ANNEXE II.2

FORMULES DE PARTITIONNEMENT D'UNE MATRICE REGULIERE [4]

Soit M une matrice régulière indicée en lignes par L et en colonnes par K. $\forall I \subset L, (I \neq \emptyset), \exists J \subset K$ avec $|J| = |I|$ tel que la sous-matrice M_I^J soit régulière. Autrement M_I ne serait pas de rang maximum.

En d'autres termes, si M est une matrice et que l'on partitionne l'ensemble de ses lignes en I et $\overline{I}$ on peut partager l'ensemble de ses colonnes en J et $\overline{J}$ de telle sorte que la matrice M_I^J soit carrée et régulière.

Appelons $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ce partitionnement de M avec A régulière et $\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ le partitionnement de la matrice M^{-1}.

Nous pouvons exprimer A', B' et C' en fonction de A^{-1}, B, C et D'.

On a par définition :

$$M M^{-1} = U = \left[\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \begin{aligned} A A' + B C' &= U_1 \quad (1) \\ A B' + B D' &= 0 \quad (2) \\ C A' + D C' &= 0 \quad (3) \\ C B' + D D' &= U_2 \quad (4) \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow (1') \quad A' = A^{-1} (U_1 - B C')$$

$$(3),(1') \Rightarrow (3') \quad C A^{-1}(U_1 - B C') + D C' = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow (2') \quad B' = -A^{-1} B D'$$

$$(4),(2') \Rightarrow (4') \quad -C A^{-1} B D' + D D' = U_2$$

$$(4') \quad (D - C A^{-1} B) D' = U_2$$

...

Cette dernière équation entraîne la régularité de D'. D'où les formules :

$$D' = (D - C\,A^{-1}\,B)^{-1}$$

$$B' = -A^{-1}\,B\,D'$$

$$C' = -D'\,C\,A^{-1}$$

$$A' = A^{-1}\,(U_1 - B\,C')$$

$$= (U_1 - B'C)\,A^{-1}$$

$$= A^{-1} + A^{-1}\,B\,D'\,C\,A^{-1}$$

ANNEXE III.1

VARIABLE ENTRANTE ET SORTANTE APPARENTEES

On dira que la variable entrante est apparentée à la variable sortante si ces deux variables correspondent au même élément d'une forêt.

Il peut s'agir d'une variable α_i associée à une boucle ou de variables $e^p_{l_i}$ et $e^n_{l_i}$ associées à un arc.

1°) - La variable candidate sort de la base et correspond à une boucle

Dans ce cas, les forêts ne sont pas modifiées. D'autre part, la matrice D' reste la même, la base réduite étant inchangée. Il en est de même pour les multiplicateurs, bien évidemment.

Seul le vecteur x peut être modifié, et ce uniquement si la boucle est rattachée à un noeud n_s appartenant soit à $\overline{N}$, soit à une c. c. ayant comme racine une boucle fictive. Ceci en raison de l'expression de la colonne transformée.

$$\pm \mathcal{B}_r^{-1} u_s = \begin{bmatrix} A'^s \\ \cdots\cdots \\ C'^s \\ \cdots\cdots \\ M_2'^s \end{bmatrix} \quad \text{si } \alpha_s \text{ est rattachée à } n_s \in N$$

ou

$$\begin{bmatrix} B'^s \\ \cdots\cdots \\ D'^s \\ \cdots\cdots \\ M_2'^s \end{bmatrix} \quad \text{si } \alpha_s \text{ est rattachée à } n_s \in \overline{N}$$

$D'^s \neq 0 \ \forall s$ en rappelant que $C'^s = - D' C A^{-1s}$

et en notant que $C A^{-1s} = 0$ si la boucle en amont de n_s est une boucle vraie.

On démontre que x reste inchangé si $n_s \in N$ et est en aval d'une boucle vraie.

...

2°) - Variable candidate correspondant à un arc associé à la variable sortante

Il s'agit du cas de deux variables du type e_{ls} associées au même arc.

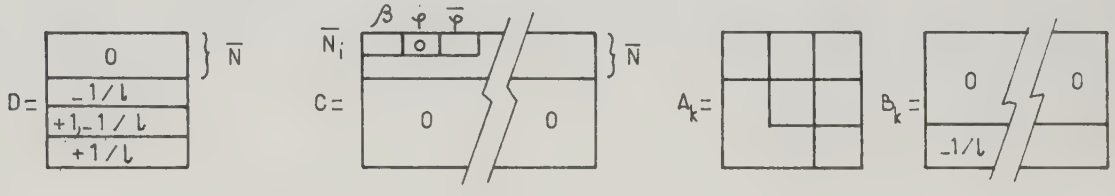
La contrainte associée à e_{lr} est omise dans la base réduite $\mathcal{B}_r(I)$.

La matrice $\mathcal{B}_r$ est seulement modifiée par le changement de signe de l'élément correspondant au flux φ_s correspondant à la contrainte de transit considérée dans le problème réduit. Il est bien évident que des modifications des multiplicateurs associés à la base interviendront dans le changement de base. Et il en est de même pour le vecteur x.

En ce qui concerne la matrice D', on peut distinguer trois cas :

1 - Si l'arc s est incident à deux composantes connexes ayant une boucle vraie comme racine ou si ses extrémités sont associées à la même composante connexe, la matrice D' reste inchangée. Ceci peut être prouvé en écrivant la formule de D', soit $D' = (D - C\,A^{-1}\,B)^{-1}$, et en disant que si $D - CA^{-1}\,B$ reste inchangé, D' le restera aussi.

Rappelons la structure de D



Nous remarquons que D reste inchangée.

La matrice $C_{sup}\,A^{-1}\,B$ indicée en lignes comme $\bar{N}$ et en colonnes comme x a des éléments tels que :

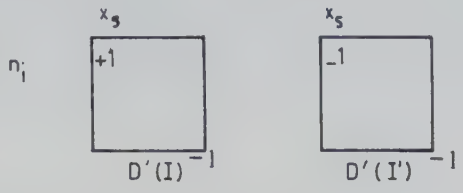
$[C_{sup}\,A^{-1}\,B](i,j) = \pm 1$ si l'arc j a l'une de ses contraintes de transit saturée, et si une et une seule de ses extrémités est égale au noeud n_i ($n_i \in \bar{N}$) ou appartient à une c.c. ayant n_i comme sommet amont de la boucle fictive de cette c.c.

$= 0$ Autrement.

Donc, dans ce cas, $D - C\,A^{-1}\,B$ reste inchangée.

...

2 - Si l'arc s a une seule composante connexe associée possédant une boucle fictive, un seul élément de D'^{-1} est modifié et il suffit de faire un changement de signe.



En appliquant la formule de Wood burry nous pouvons facilement calculer la nouvelle matrice D'(I')en fonction de D'(I)[7] .

$$D'(I')^{-1} = D'(I)^{-1} + u_k\ (\pm 2)\ u_\ell^t$$

k étant la ligne associée à $\overline{n}_i$ et ℓ la colonne associée à $\overline{\varphi}_s$.

$$(A + UT^{-1}\ V^t)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\ U\ (T + V^t\ A^{-1}\ U)^{-1}\ V^t\ A^{-1}$$

en posant $A = D'(I)^{-1}$, $U = u_k$, $V = u_\ell$ on a :

$$T^{-1} = \pm 2$$

$$D'(I') = [D'(I) + u_k\ (\pm 2)\ u_\ell^t\ ]^{-1} - D'(I)\ u_k[(\pm 2)^{-1} + u_\ell^t\ D'(I)\ u_k]^{-1}\ u_\ell^t\ D'(I)$$

on a $D'(I)u_k$ = colonne k de D'(I), $u_\ell^t\ D'(I)$ est la ligne ℓ de D'(I), $u_\ell^t D'(I) u_k$ est l'élément(ℓ, k)de D'(I).

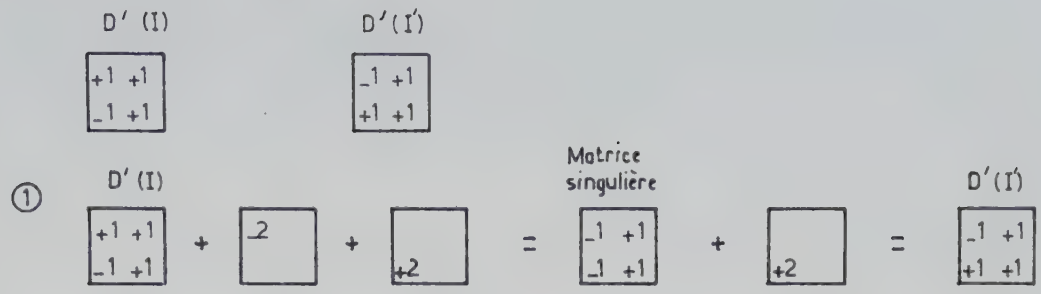
$$D'(I') = D'(I) - D'(I)^k[\pm \tfrac{1}{2} + D'(I)(\ell,k)]^{-1}\ \ D'(I)_\ell$$

Le recalcul de D' est fait en fonction de vecteurs connus.

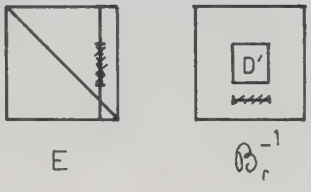
3 - Si l'arc s est incident a deux c.c. ayant des boucles fictives en amont, on serait tenté d'appliquer à deux reprises cette formule. Un exemple suffira à montrer que nous risquerions de trouver une matrice singulière entre la première et la deuxième opération.

...

Ex :



Dans ce cas,il nous faut appliquer les formules de pivotage. Pour cela, on calculera la ligne au-dessus ou au-dessous de D' et la portion de colonne de la matrice E.

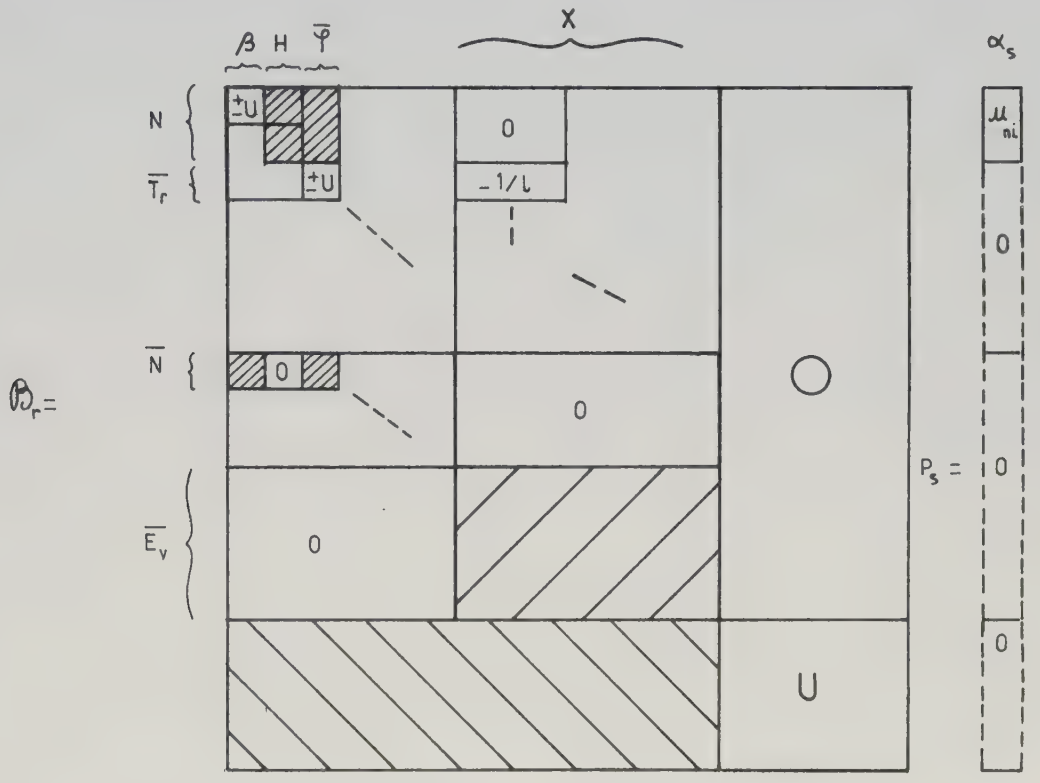


...

ANNEXE III.2

BOUCLE ENTRANTE ASSOCIEE A UNE COMPOSANTE CONNEXE AVEC UNE BOUCLE VRAIE

Considérons une boucle α_s entrant dans la base dont le noeud de rattachement n_i appartient à N. Sous forme matricielle, on a :



La colonne associée à α_s est une colonne unité u_{ni} ayant ±1 à la ligne correspondante au noeud n_i. La colonne transformée $\bar{P}_s$ est donc égale au signe près à la colonne n_i de $\mathcal{B}_r^{-1}$.

Si la racine en amont est une boucle vraie, le produit $C A^{-1}{}_i$ est nul et donc C'^i est nulle. La colonne i de A^{-1} est non-nulle pour le bloc j correspondant à α_s. Soit $y = [A^{-1}(j)]^{n_i}$. Le système à résoudre pour trouver y est :

$$A(j)y = u_{n_i}$$

$$y = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{élément} \neq 0 \text{ pour le chemin } [n_i, \text{ racine en amont de } n_i[.$$

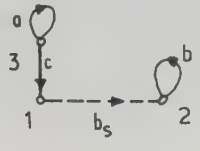
...

ANNEXE III.3

ARC ENTRANT b_s ET NATURE DES RACINES ASSOCIEES A SES EXTREMITES

Nous allons démontrer que, lorsqu'un arc b_s entre dans une forêt, lors des modifications des forêts et des numérotations dues à un changement de base, une fois l'influence de la variable candidate répercutée et dans le cas où l'arc b_s a ses deux extrémités dans N, les racines en amont de ces extrémités ne peuvent être deux boucles vraies

EX :



	a	b	c	b_s
①			+1	-1
②		-1		+1
③	+1		-1	
p	-1	+1		

Considérons le système formé par les deux composantes connexes, l'arc b_s plus un noeud fictif p tel que les deux boucles soient considérées comme des arcs incidents au noeud p, et à leur noeud de rattachement.

Ce système est équivalent à la représentation sans p.

Dans ce nouveau système, il existe un cycle formé par b_s, les chemins amont de b_s aux racines, plus les arcs représentant les anciennes boucles. Il existe donc une relation linéaire entre ces colonnes ce qui prouve que la matrice d'incidence du nouveau système est singulière.

La matrice $N \times \{\beta_v, \mathcal{V}, b_s\}$ a une colonne de plus que de lignes. Cette matrice ne peut être transformée en une matrice régulière par l'addition d'une ligne de la matrice d'incidence.

ANNEXE IV.1

SOUS-PROGRAMMES DE L'ALGORITHME

SOUS-PROGRAMME APFLO

Ce sous-programme est destiné à appeler le programme Flomai en lui transmettant l'indice du problème de flot à traiter ainsi que la valeur des pointeurs relatifs aux vecteurs concernant ce problème. Les valeurs de ces pointeurs correspondent au début des tableaux.

SOUS-PROGRAMME APNIR

Ce sous-programme appelle le sous-programme NIR en lui fournissant la numérotation relative à la forêt à considérer ainsi que la position de l'élément sortant dans la numérotation et le nombre d'éléments de la forêt et le nombre de branches.

SOUS-PROGRAMME APNIS

Ce sous-programme appelle le sous-programme NIS en lui donnant la numérotation résultant de NIR ou la numérotation associée à la forêt qui gagne un élément. Le premier cas correspond à la sortie d'un élément de la même forêt en cours d'une itération.

SOUS-PROGRAMME CALTE 3

Ce sous-programme calcule les valeurs du vecteur $e_{2_{\mathcal{B}_r}}$ et le minimum des rapports $e_{2_i}/\bar{a}_i^s$ pour trouver la variable sortante.

...

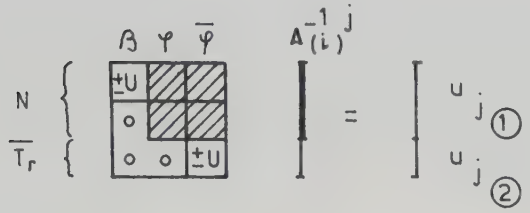
SOUS-PROGRAMME COLAM 1

Ce sous-programme calcule une colonne j de la matrice $A^{-1}(i)$ en résolvant le système à droite :

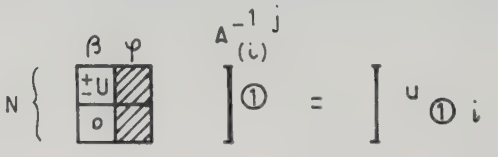
$$A_{(i)} \quad A^{-1}{}^{j}_{(i)} = u_j$$

Deux cas sont à distinguer dans ce calcul :

ou bien la colonne correspond à un noeud,
ou bien la colonne correspond à une contrainte de transit active.



Dans le premier cas, le vecteur u_j ② est nul et le système est réduit au système



avec $A^{-1}{}^{j}_{(i)②} = \begin{vmatrix} o \end{vmatrix}$

SOUS-PROGRAMME COLCP

Ce sous-programme a pour but de calculer une colonne j de C' dont l'expression est :

$$C'^{j} = - D'C\ A^{-1}{}^{j}$$

ceci en appelant Colam 1 puis en définissant la correspondance lignes-noeuds de $\overline{N}$ dans C pour la situation associée à la colonne j de $A^{-1}(i)$, qui est la partie de la colonne j de A^{-1} dont les éléments ne sont pas nuls en raison de la structure angulaire de A.

Après un test pour définir si l'ensemble des noeuds de $\overline{N}$ pour la situation n'est pas vide, on appelle Prempc puis Premdp qui définissent la colonne j de C'.

SOUS-PROGRAMME COLDP

Ce sous-programme détermine la position d'une colonne de D' définie par un noeud de $\overline{N}$ ou par une contrainte de $\overline{E_v}$, puis donne la colonne de D' ainsi définie.

...

SOUS-PROGRAMME COLTI

Ce sous-programme a pour but de calculer une colonne de la matrice $\mathcal{B}_r^{-1}$ appartenant soit à $\begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix}$ soit à $\begin{bmatrix} B' \\ D' \end{bmatrix}$ connaissant la colonne de C' ou de D' de même indice préalablement calculée. Ceci est réalisé dans les deux cas par COLTI.

SOUS-PROGRAMME COUTR 1

Ce sous-programme a pour tâche de calculer le coût relatif des variables hors base du type α_i et e_{1_i} associées à un bloc de la matrice A de la base. Pour faire ce calcul on utilise comme donnée le vecteur des multiplicateurs associés au bloc considéré, plus le vecteur des multiplicateurs relatif à la matrice D de la base réduite.

SOUS-PROGRAMME COUTR 2

Par ce sous-programme on calcule les coûts relatifs des variables e_{2_i} hors base.

On a :

$$\bar{f}_i = f_i - \Pi_j \quad \text{avec} \quad f_i = 0 \Rightarrow \bar{f}_i = -\Pi_j$$

Il suffit donc d'identifier si e_{2_i} est hors base ou non et de faire un changement de signe.

SOUS-PROGRAMME DPPMP

DPPMP fait les calculs associés à la formule de WOODBURRY telle qu'elle a été décrite en Annexe III.1. On prend la valeur, gardée en mémoire, de la colonne k de D' puis on calcule le terme $[\pm 1/2 + D'^{k}_{\ell}]^{-1}$. Si ce terme est nul, on a :

$$D'(I) = D'(I')$$

Autrement, on prend la valeur de D'_ℓ, on fait la somme de D' et $D'^{k}\,[\pm 1/2 + D'(\ell,k)]^{-1}\, D'_\ell$.

...

SOUS-PROGRAMME DPRIM

DPRIM a pour but de calculer le terme $D - C A^{-1} B$ et de transmettre le résultat au sous-programme MATRI pour l'inverser. La matrice D' ainsi calculée sera mise en mémoire sous forme de trois vecteurs.

Le premier donne la valeur des éléments non nuls de D', le second donne la ligne dans laquelle il se trouve, enfin le troisième donne la position dans le premier vecteur du dernier élément de chaque colonne. La première valeur de ce vecteur est 0.

SOUS-PROGRAMME FLOMAI

Flomai optimise le flot de chaque problème de gestion défini par une valeur de x(t), un vecteur p(t,r) et d(t,j).

SOUS-PROGRAMME LECTUR

LECTUR sert à lire les données, initialiser certains vecteurs et mettre toute cette information sous la forme appropriée à son exploitation.

SOUS-PROGRAMME LIAIB

LIAIB calcule le produit :

$$A^{-1}_{(i)_j} \; B_{(i)}$$

qui est un vecteur dont les composantes sont +1, -1 ou 0 et qui est le sous-vecteur de $A^{-1}_{.j}$ B correspondant à la situation i. Ceci s'inscrit dans le cadre du calcul de $A'_{(j,k)}$ ou $B'_{(j,k)}$ en remarquant que $A^{-1}_{(i)_j}$ n'a des éléments non nuls que dans la partie correspondant à N.

SOUS-PROGRAMME LIBP

LIBP calcule la ligne j de B' nécessaire à l'actualisation de D'. On appelle LIAIB puis, pour chaque composante non nulle de $A^{-1}_{.j}$ B, on appelle LIDP avec comme argument la valeur de cette composante.

...

SOUS-PROGRAMME LIDP

LIDP a pour objectif de relever la valeur du vecteur D'_i de la mémoire.

SOUS-PROGRAMME LØGDA 2

LØGDA 2 initialise tous les vecteurs logiques définissant la base du problème ainsi que le partitionnement de $\overline{I}$, de $\mathcal{E}_v$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{N}$ etc... On donne également $\overline{p}(t)$ et un vecteur logique LØG 5 permettant de définir les vecteurs p(t,r) et enfin une numérotation des forêts.

LØGDA 2 donne ainsi la solution de départ et la strucutre de $\mathcal{B}_r$ correspondant à cette solution.

SOUS-PROGRAMME MATRI

MATRI calcule l'inverse d'une matrice.

SOUS-PROGRAMME MODIFI

On modifie les vecteurs logiques ainsi que la numérotation des forêts correspondant au type de changement de base de l'itération réalisée, lorsque la variable candidate et la variable sortante ne sont pas associées au même élément d'une forêt.

SOUS-PROGRAMME MODIFO

On modifie, en appelant les sous-programmes DPPMP et SORE22, la matrice D' ainsi que les vecteurs logiques lorsque le changement de base est tel que la variable candidate et la variable sortante correspondent au même élément d'une forêt.

SOUS-PROGRAMME NIR

Ce sous-programme donne en fonction de l'élément sortant d'une forêt et de sa numérotation une numérotation pour la nouvelle forêt.

...

SOUS-PROGRAMME NIS

On obtient une nouvelle numérotation en fonction de l'ancienne numérotation de la forêt et de l'élément rentrant dans celle-ci.

SOUS-PROGRAMME PAPIJ

On calcule l'élément $A^{-1}(i, j)$; on appelle LIAIB.

SOUS-PROGRAMME PI1

On calcule par ce sous-programme le vecteur des multiplicateurs associés au bloc $A_{(i)}$.

SOUS-PROGRAMME PI2

On détermine la valeur du vecteur Π_2 en appelant POSTDP.

SOUS-PROGRAMME POSITI

On détermine par ce sous-programme la position des colonnes de D' (I) à éliminer et à introduire afin de calculer D'(I').

SOUS-PROGRAMME POSTDP

Ce sous-programme réalise la post-multiplication d'un vecteur par la matrice D', afin de calculer le vecteur Π_2.

SOUS-PROGRAMME PREMMP

On réalise la mise à jour de Π_2 et D' en effectuant la prémultiplication par la matrice de passage E qui intervient dans les formules du changement de base.

SOUS-PROGRAMME PREMPC

On multiplie C par un vecteur colonne.

...

PRIN

Programme principal.

FUNCTION RANDOG

Fonction donnant des valeurs aléatoires permettant de tirer au sort les situations d'indisponibilité.

SOUS-PROGRAMME SOLI

Ce sous-programme calcule le vecteur solution relatif à un bloc $A_{(i)}$.

SOUS-PROGRAMME SORE 2

Ce sous-programme qui appelle LIBP, LIDP, COLCP, PAPIJ, calcule les éléments de la matrice D'(I) permettant de calculer la matrice D'(I') lorsque la variable sortante est du type e_{l_i} et que la variable candidate n'est pas la variable associée au même arc.

SOUS-PROGRAMME SORE 22

Ce sous-programme qui appelle LIBP, LIDP, PREMMP calcule la nouvelle matrice D' lorsque les variables candidate et sortante ($e^p_{l_i}$, $e^n_{l_i}$) sont associées au même arc.

SOUS-PROGRAMME TETA

Ce sous-programme calcule les rapports définissant la variable sortante pour un bloc i en prenant le minimum entre une valeur tranmise et le minimum relatif au bloc i considéré.

SOUS-PROGRAMME VARCAN

Ce sous-programme qui appelle PI1, COUTRI, COUTR 2 définit la variable candidate suivant le critère standard.

...

SOUS-PROGRAMME VARSOR

Ce sous-programme qui appelle COLCP, COLDP, CALTE 3, SOLI, COLTI, TETA, détermine bloc par bloc la colonne transformée et la variable sortante.

...

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. MERLIN - G. SANTUCCI
Application des modèles probabilistes à la planification à long terme des grands réseaux électriques ; l'exemple EDF
RGE, Volume 89, p. 98-107 - 1980-02

[2] C. BERGE
Graphes et hypergraphes - Dunod-1970

[3] Leon S. LASDON
Optimization theory for large systems
Macmillan series on operations research -1970

[4] J.F. MAURRAS
Méthode de partitionnement en programmation linéaire
EDF - Bulletin de la D.E.R. serie C - Mathématiques et informatique:
N° 1 - p. 41-46 - 1975

[5] J.F. MAURRAS
Optimisation of the flow through networks with gains
Mathematical Programming, Vol. 3 n° 2, Octobre-1972.

[6] P. HUARD
Cours U8 Analyse Numerique Lineaire
Université de LILLE
Optimisation en contraintes linéaires (résumé de cours)

[7] M. WOODBURY
Inverting modified matrices, memorandum report 42, Statistical research group princeton - 1950.

[8] J.C. DODU A. MERLIN
A dynamic model for long term expansion planning studies of power transmission systems : The ORTIE model
6th P.S.C.C., Vol. 1, p. 110-121 Août - 1978